Tema 4: Formas bilineales.

1. Concepto de forma bilineal.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una aplicación. Se dice que f es una **forma bilineal** si f verifica las propiedades siguientes

1. $f(\alpha v + \beta v', v'') = \alpha f(v, v'') + \beta f(v', v''), \qquad \forall \alpha, \beta \in K,\ v, v', v'' \in V.$
2. $f(v, \alpha v' + \beta v'') = \alpha f(v, v') + \beta f(v, v''), \qquad \forall \alpha, \beta \in K,\ v, v', v'' \in V.$

Observamos que si $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal y $v_0 \in V$, entonces

$$\begin{array}{rccc} f_{1,v_0}: & V & \to & K \\ & v & \mapsto & f(v_0, v) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} f_{2,v_0}: & V & \to & K \\ & v & \mapsto & f(v, v_0) \end{array}$$

son aplicaciones lineales. Tenemos una caracterización sencilla para saber s i una aplicación $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal:

Teorema 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una aplicación. Entonces, f es forma bilineal si y sólo si $\forall \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in K$, $\forall v_1, v_1', v_2, v_2' \in V$*

$$f(\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1', \alpha_2 v_2 + \beta_2 v_2') = \alpha_1\alpha_2 f(v_1, v_2) + \alpha_1\beta_2 f(v_1, v_2') + \beta_1\alpha_2 f(v_1', v_2) + \beta_1\beta_2 f(v_1', v_2').$$

Es fácil construir formas bilineales a partir de aplicaciones lineales:

Teorema 1.2. *Sea V un K-espacio vectorial y $\psi_i : V \to K$, $i = 1, 2$ dos aplicaciones lineales. Entonces, la aplicación $f : V \times V \to K$ definida por*

$$f(v_1, v_2) = \psi_1(v_1)\psi_2(v_2)$$

es una forma bilineal.

Las formas bilineales verifican las siguientes propiedades:

Teorema 1.3. *Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una forma bilineal. Entonces,* *(i)* $f(0_V, v) = f(v, 0_V) = 0_K$, $\forall v \in V$.

(ii) $f(-v, v') = f(v, -v') = -f(v, v')$, $\forall v, v' \in V$

(iii) $f(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i, v') = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f(v_i, v')$ *y* $f(v, \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v'_i) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f(v, v'_i)$,
$\forall \alpha_i \in K, \forall v, v_i, v', v'_i \in V$, *con* $i = 1, \ldots, l$.

2. Matriz asociada a una forma bilineal.

Al igual que sucede con las aplicaciones lineales, cuando trabajamos con una forma bilineal f, podemos dar $f(v, v')$ conociendo los valores que toma la forma bilineal f sobre una base.

Definición. Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal y $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base de V.Se llama **matriz asociada a la forma bilineal** f respecto de la base $\mathfrak{B}_V$ a la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ definida por

$$A_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \ldots & f(v_1, v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_n, v_1) & \ldots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Dada una forma bilineal $f : V \times V \to K$ y una base $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots v_n\}$ de V, si $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es la matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_V$, entonces

$$f(v, v') = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) A_{\mathfrak{B}_V}(f) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

siendo $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de los vectores v y v', respectivamente, en la base $\mathfrak{B}_V$. A la expresión anterior de $f(v, v')$ se le conoce como **expresión matricial de la forma bilineal** f en la base $\mathfrak{B}_V$.

Al igual que sucede para aplicaciones lineales, existe una relación entre las matrices asociadas a una misma forma bilineal:

Teorema 2.1. *Sea* $f : V \times V \to K$ *una forma bilineal,* $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}'_V$ *dos bases de* V *y* $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ *la matriz asociada a* f *en la base* B_V *y* $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$ *la matriz asociada a* f *en la base* $\mathfrak{B}'_V$*. Entonces,*

$$A_{\mathfrak{B}'_V}(f) = M^t_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V} A_{\mathfrak{B}_V}(f)(M_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V}),$$

donde $M_{\mathfrak{B}'_V\mathfrak{B}_V}$ *es la matriz de cambio de base entre* $\mathfrak{B}'_V$ *y* $\mathfrak{B}_V$*.*

También se puede demostrar:

Teorema 2.2. *Sea* $f : V \times V \to K$ *una forma bilineal,* $\mathfrak{B}_V$*,* $\mathfrak{B}'_V$ *dos bases de* V *y* $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ *la matriz asociada a* f *en la base* $\mathfrak{B}_V$*. Entonces, si* $M_{\mathfrak{B}'_V\mathfrak{B}_V}$ *es la matriz de cambio de coordenadas entre* $\mathfrak{B}'_V$ *y* $\mathfrak{B}_V$*, la matriz* B *definida por*

$$B = M^t_{\mathfrak{B}'_V\mathfrak{B}_V} A_{\mathfrak{B}_V}(f)(M_{\mathfrak{B}'_V\mathfrak{B}_V})$$

es la matriz asociada a f *respecto de* $\mathfrak{B}'_V$*.*

En vista de la relación que existe entre matrices asociadas a una misma forma bilineal damos la siguiente definición:

Definición. Sean $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Se dice que A y B son **congruentes** si existe $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible tal que $B = P^t AP$.

Como se observa, las matrices asociadas a una misma forma bilineal son congruentes.

3. Formas bilineales simétricas. Ortogonalidad.

Empezamos a trabajar con un tipo especial de formas bilineales: las simétricas.

Definición. Una forma bilineal $f : V \times V \to K$ se dice que es una **forma bilineal simétrica** si $f(v, v') = f(v', v)$ para cualesquiera vectores $v, v' \in V$.

Es sencillo caracterizar a las formas bilineales simétricas: son aquellas que tienen por matriz asociada a matrices simétricas, esto es, matrices que verifican que $A = A^t$.

Para las formas bilineales simétricas introducimos un nuevo concepto: el de ortogonalidad.

Definición. Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $v, v' \in V$. Se dice que v y v' son **vectores ortogonales** respecto de f si $f(v, v') = 0$.

Es fácil probar que

Teorema 3.1. *Sea* $f : V \times V \to K$ *una forma bilineal simétrica y* S *un subespacio vectorial de* V*. Entonces,*

$$S^{\perp} = \{v \in V | v \text{ es ortogonal a } s, \forall s \in S\}$$

es un subespacio vectorial llamado subespacio ortogonal ó **complemento ortogonal** *de* S.

Cuando $S = V$, al complemento ortogonal de V se le llama **núcleo de la forma bilineal** f.

4. Formas no degeneradas.

En esta lección estudiamos un tipo especial de formas bilineales simétricas: las no degeneradas. Una forma bilineal simétrica f se dice que es **no degenerada** si el núcleo de la forma bilineal f es $\{0_V\}$.

Estas formas bilineales no degeneradas tienen una caracterización sencilla es términos de su matriz asociada. En efecto, es fácil demostrar que

Teorema 4.1. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces, f es no degenerada si y sólo si su matriz asociada respecto de cualquier base es inversible.*

Además, cuando se trabaja con formas bilineales simétricas no degeneradas existe una relación entre las dimensiones de un subespacio y su ortogonal:

Teorema 4.2. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Si S es un subespacio de V, entonces*

$$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp},$$

donde $S^{\perp}$ es el complemento ortogonal de S respecto de f.

5. Bases ortogonales.

Cuando se trabaja con formas bilineales simétricas se pueden construir un tipo de bases especiales: las ortogonales.

Definición. Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Se dice que $\mathfrak{B}_V$ es una **base ortogonal** respecto de f si $f(v_i, v_j) = 0_K$, para cualesquiera vectores distintos v_i, v_j de $\mathfrak{B}_V$.

La importancia de las bases ortogonales radica en que la matriz asociada a la forma bilineal simétrica f respecto de una base ortogonal es diagonal. Debido a la sencillez de la matriz asociada, nos interesa tener un método que nos permita localizar estas bases ortogonales. Para ello, necesitamos introducir un concepto: el de vector isótropo.

Definición. Un vector v se dice que es **isótropo** respecto de la forma bilineal simétrica f si $f(v,v) = 0_K$. En caso contrario, se dice que v es **no isótropo**.

Es fácil demostrar que los vectores del núcleo de una forma bilineal son todos isótropos y que, en general, el conjunto de vectores isótropos no forma un subespacio de V. Además, también se prueba que la única forma bilineal que tiene todos los vectores isótropos es la forma bilineal nula.

Los vectores no isótropos tienen la siguiente propiedad

Lema 5.1. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $v \in V$ un vector no isótropo respecto de f. Entonces $V =< v > \oplus < v >^{\perp}$.*

Teniendo en cuenta el lema anterior, podemos dar un método que permite obtener bases ortogonales cuando se tiene una forma bilineal simétrica. El proceso consiste en:

1. Se toma un vector no isótropo v_1,
2. Se expresa $V =< v_1 > \oplus < v_1 >^{\perp}$.
3. Se reitera el proceso considerando como subespacio $< v_1 >^{\perp}$, esto es, se localiza v_2 no isótropo y se descompone $< v_1 >^{\perp} =< v_2 > \oplus < v_1, v_2 >^{\perp}$. Y así sucesivamente.
4. El proceso finaliza cuando no es posible localizar un vector no isótropo en el subespacio $< v_1, v_2, \ldots, v_i >^{\perp}$. Entonces, la forma bilineal f restringida a $< v_1, v_2, \ldots, v_i >^{\perp}$ es la forma bilineal nula y cualquier base de este subespacio junto con los vectores obtenidos en los pasos anteriores formarán una base ortogonal de V.

Siguiendo los pasos indicados anteriormente se puede demostrar:

Teorema 5.2. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces, existe una base $\mathfrak{B}$ de V que es ortogonal respecto de f.*

La existencia de una base ortogonal para cualquier forma bilineal simétrica nos permite demostrar

Teorema 5.3. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ una matriz simétrica. Entonces, existe D matriz diagonal que es congruente con A.*

Por otro lado, en el caso particular de las formas bilineales simétricas no degeneradas, las bases ortogonales son de una tipo especial:

Teorema 5.4. *Si $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal simétrica no degenerada y $\mathfrak{B}_V$ una base ortogonal respecto de f. Entonces, los vectores de $\mathfrak{B}_V$ son no isótropos.*

6. Ley de Inercia.

Una vez que se ha demostrado la existencia de base ortogonal para las formas bilineales simétricas sobre cualquier cuerpo K, analizamos en este apartado el caso particular de las formas bilineales simétricas reales, esto es, aquellas que se definen sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Es evidente que si se trabaja con una forma bilineal simétrica real $f : V \times V \to \mathbb{R}$, entonces dado un vector $v \in V$ puede suceder que $f(v, v) < 0$, $f(v, v) > 0$, ó $f(v, v) = 0$. Por otro lado, al ser f una forma bilineal simétrica real existe una base ortogonal y consecuentemente, la matriz asociada a f respecto de una base ortogonal va a ser diagonal.

Teorema 6.1. Ley de inercia. *Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica real y $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}'_V$ dos bases de V ortogonales respecto de f. Si r_1 denota el número de entradas positivas en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$, r_2 denota el número de entradas mayores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, s_1 denota el número de entradas menores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$, s_2 denota el número de entradas menores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, t_1 denota el número de entradas iguales a 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y t_2 denota el número de entradas iguales a 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, entonces*

$$r_1 = r_2 \qquad s_1 = s_2 \qquad t_1 = t_2.$$

La ley de inercia motiva la definición de **signatura de una forma bilineal simétrica real**. Dada una forma bilineal simétrica real f se llama **signatura de** f al par (r, s), donde r es el número de entradas mayores que 0 que aparecen en la diagonal principal de una matriz diagonal asociada a f y s es el número de entradas menores que 0 que aparecen en dicha diagonal.

Lo primero que se observa es que vía la signatura podemos saber si una forma bilineal simétrica real es degenerada o no. Las no degeneradas serán aquellas en las que $r + s$ coincida con la dimensión del espacio vecotrial V sobre el que está definida la forma bilineal simétrica real.

Interpretando una matriz simétrica real A como la matriz asociada a una forma bilineal simétrica real f, sabemos que A es congruente con una matriz diagonal D y empleando la ley de inercia aplicada a f, podemos definir el concepto de **signatura de una matriz simétrica real** como sigue: es el par (r, s), donde r es el número de entradas mayores que 0 que aparecen en la diagonal una matriz diagonal congruente con A y donde s es el número de entradas menores que 0 que aparecen en dicha diagonal.

La importancia del concepto de signatura reside en el último resultado que se prueba en este apartado: la signatura nos permite caracterizar las matrices congruentes.

Teorema 6.2. *Sean $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dos matrices simétricas reales. Entonces, A y B son congruentes si y sólo si poseen la misma signatura.*

Por otro lado, aplicando este resultado al caso particular de las matrices asociadas a una misma forma bilineal simétrica real, podemos determinar si una matriz simétrica real es matriz asociada a una forma bilineal simétrica real dada o no: bastará que la signatura de la matriz y de f coincidan.

7. Formas definidas positivas y negativas.

En este apartado estudiamos unas formas bilineales simétricas reales especiales: las definidas positivas y las definidas negativas. Será interesante un estudio inicial de las mismas porque las formas bilineales definidas positivas no degeneradas son lo que se conocen como productos escalares que se analizarán en profundidad en el siguiente tema.

Definición. Una forma bilineal simétrica real $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se dice que es **definida positiva** si $f(v, v) \geq 0$ para cualquier vector v de V.

Definición. Una forma bilineal simétrica real $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se dice que es **definida negativa** si $f(v, v) \leq 0$ para cualquier vector v de V.

En términos de matrices, se dice que una matriz simétrica real A es **definida positiva** si $XAX^t \geq 0$ para cualquier vector $X = (x_1 \dots x_n) \in Mat_{1\times n}(\mathbb{R})$ y **definida negativa** si $XAX^t \leq 0$ para cualquier vector $X = (x_1 \dots x_n) \in Mat_{1\times n}(\mathbb{R})$.

Es fácil ver que una forma bilineal simétrica real es definida positiva si y sólo si tiene matrices asociadas definidas positivas y es definida negativa si y sólo si tienen por matriz asociada a matrices definidas negativas.

Además, existe una caracterización de las matrices definidas positivas y negativas muy sencilla de comprobar, que en combinación con el reaultado anterior nos permitirá conocer de forma rápida si una forma bilineal simétrica real es definida positiva o no. Esta caracterización es conocida como Criterio de Sylvester

Teorema 7.1. Criterio de Sylvester. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica* *real y* $\Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix}$. *Entonces,*

(i) Si $\Delta_j > 0$ *para* $j = 1 \dots n$, *entonces* A *es definida positiva.*

(ii) Si $(-1)^j \Delta_j < 0$ *para* $j = 1 \dots n$, *entonces* A *es definida negativa.*

8. Formas cuadráticas.

Dada una forma bilineal simétrica real f definida sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V se llama **forma cuadrática asociada a** f a la aplicación $\psi : V \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(v) = f(v, v)$.

Si $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica real y $\psi : V \to \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada, entonces

1. $\psi(0_V) = 0$.
2. $\psi(\alpha v) = \alpha^2 \psi(v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,$\forall v \in V$. Luego ψ no es aplicación lineal.
3. $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v) + 2f(u, v)$.

Observamos que la última igualdad nos da una relación entre una forma bilineal simétrica y su forma cuadrática asociada.