4. Bloques básicos de Jordan. Obtención de la forma canónica de Jordan.

Tras haber introducido en el apartado anterior los subespacios fundamentales generalizados, en ésta nos encontramos en disposición de dar un método que permita obtener la forma canónica de Jordan de una matriz o de un endomorfismo triangularizable.

Definición. Un **bloque básico de Jordan** de orden m para el valor propio λ es una matriz $J_m(\lambda) = (j_{kl}) \in Mat_{m\times m}(K)$ definida por $j_{kl} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } k = l; \\ 1, & \text{si } l = k+1; \\ 0, & \text{si } l \neq k, k+1. \end{cases}$ Una **matriz de Jordan** J es una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son bloques básicos de Jordan.

Dado un endomorfismo triangularizable f se llama **forma canónica de Jordan del endomorfismo** f a una matriz de Jordan que sea matriz asociada al endomorfismo f. La forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable es única salvo el orden de los bloques básicos de Jordan.

La existencia de la forma canónica de Jordan de un endomorfismo se demuestra en este apartado mediante la construcción de dicha matriz de Jordan. De hecho, nos centramos en dar un método que permita calcular la forma canónica de Jordan de un endomorfismo. El proceso consiste en elegir adecuadamente los vectores de los subespacios fundamentales generalizados para que la matriz asociada a sea de la forma buscada. En esencia, el proceso consiste en ir tomando vectores linealmente independientes que se encuentren en un eslabón de la cadena de subespacios fundamentales generalizados asociados a un valor propio y no en el eslabón anterior, comenzando por vectores que estén en el subespacio generalizado máximo. Empleando estos vectores, se genera una familia de vectores linealmente independientes que formarán la base respecto de la cual la matriz asociada es una matriz de Jordan. En concreto el proceso a seguir es el siguiente:

Algoritmo para calcular la forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable

Paso 1: Se calcula el polinomio característico de f: $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (x - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}$

Paso 2: Para cada valor propio λ se calcula la cadena de subespacios fundamentales generalizados: $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \dots \subsetneq E_t(\lambda) = E^*(\lambda)$.

Paso 3: Se escribe $E^*(\lambda) = E_{t-1}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$. Para ello, se localizan $l = \dim(E^*(\lambda)) - \dim(E_{t-1}(\lambda))$ vectores linealmente independientes de $E^*(\lambda) - E_{t-1}(\lambda)$, de forma que $F_t(\lambda) =< v_{1t} \dots v_{lt} >$ verifique $E^*(\lambda) = E_{t-1}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$.

Paso 4: Para cada vector v_{it} se calculan los vectores: $(f - \lambda 1_V)^j(v_{it})$, para $j =$

$0, \ldots, t-1$.

Paso 5: Si $< \{v_{1t}, (f-\lambda 1_V)(v_{1t}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{1t}), \ldots, v_{lt}, (f-\lambda 1_V)(v_{lt}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{lt}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{lt})\} >$ coincide con $E^*(\lambda)$, el proceso para este valor propio ha finalizado. En caso contrario, se localiza el mayor número posible de vectores de $E_{t-1}(\lambda) - E_{t-2}(\lambda)$ que sean linealmente independientes con los que ya tenemos $\{v_{1t}, (f-\lambda 1_V)(v_{1t}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{1t}), \ldots, v_{lt}, (f-\lambda 1_V)(v_{lt}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{lt}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{lt})\}$ para descomponer $E_{t-1}(\lambda) = E_{t-2}(\lambda) \oplus S_{t-1}(\lambda)$ teniendo en cuenta que de $S_{t-1}(\lambda)$ conocemos ya los vectores $\{(f-\lambda 1_V)(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)(v_{lt})\}$. El número de vectores nuevos que debemos localizar viene dado por $\dim(E_{t-1}(\lambda)) - \dim(E_{t-2}(\lambda)) - l$. Si no es posible encontrar aquí, se va bajando en los eslabones de la cadena hasta conseguir nuevos vectores.

Paso 6: Supongamos que hemos hallado un vector $v \in E_j(\lambda) - E_{j-1}(\lambda)$ tal que es linealmente independiente con el conjunto que tenemos. Entonces, calculamos $(f-\lambda 1_V)^k(v)$ para $k = 0, \ldots, j-1$.

Paso 7: El proceso anterior continua hasta que obtengamos $m(\lambda)$ vectores, contando cada vector y sus imágenes sucesivas.

Paso 8: Se calcula la matriz asociada a f respecto de la base formada por los vectores junto con sus imágenes sucesivas (en orden inverso) que se han hallado para cada $E^*(\lambda)$. Por la forma de elegir vectores, sale una matriz de Jordan, que es la forma canónica de Jordan del endomorfismo f. En esta matriz de Jordan aparece un bloque básico de Jordan por cada grupo formado por un vector y sus imágenes sucesivas.

Ejemplo. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $f((x, y, z, t)) = (x, y, 2x - y + z, -6x + 3y + 3z + 2t)$, su polinomio característico viene dado por $\chi_f(x) = (x-1)^3(x-2)$. Localizamos su forma canónica de Jordan y una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea su forma canónica de Jordan.

1. Para el valor propio 1 localizamos la cadena de subespacios fundamentales generalizados. Esta cadena tiene dos eslabones:

$$E_1(1) = V(1) = \{(x, 2x, z, -3z) | x, z \in \mathbb{R}\}$$

y

$$E^*(1) = E_2(1) = \{(x, y, z, -3z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Elegimos un vector de $E^*(1) - E_1(1)$. Por ejemplo $(0, 1, 0, 0)$. Calculamos

$$f((0, 1, 0, 0)) - (0, 1, 0, 0) = (0, 0, -1, 3) \in E_1(1).$$

2. Necesitamos un vector más de $E^*(1)$ que sea linealmente independiente con $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 3)\}$ porque la multiplicidad algebraica del valor propio 1 es 3. No

podemos elegirlo en $E^*(1) - E_1(1)$ porque la diferencia de dimensiones entre $E^*(1)$ y $E_1(1)$ es 1. Así que, bajamos un eslabón en la cadena y lo localizamos en $E_1(1) - \{(0,0,0,0)\}$. Como debe ser linealmente independiente con $\{(0,1,0,0),(0,0,-1,3)\}$, tomamos el vector $(1,2,0,0)$. Por tanto, para el valor propio 1, consideramos el conjunto de vectores $\{(0,0,-1,3),(0,1,0,0),(1,2,0,0)\}$. Observamos que $(0,0,-1,3)$ y $(0,1,0,0)$ están colocados en orden inverso a como los hemos generado para que el bloque básico asociado sea de Jordan.

3. Para el valor propio 2, $E^*(2) = E_1(2) = \{(0,0,0,x_4)|x_4 \in \mathbb{R}\}$ y debemos elegir un único vector propio asociado a este valor propio porque la multiplicidad algebraica del valor propio 2 es 1a. Elegimos como vector propio a $(0,0,0,1)$.

4. Podemos formar ya la base respecto de la cual la matriz asociada a f sea una matriz de Jordan. La base que buscamos es $\{(0,0,-1,3),(0,1,0,0),(1,2,0,0),(0,0,0,1)\}$ y la forma canónica de Jordan de f es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nota: Puede ocurrir que la forma canónica de Jordan de un endomorfismo $f : V \to V$ nos dé una matriz diagonal. Esto sucede cuando para cada valor propio λ del polinomio característico de f el subespacio fundamental generalizado máximo es $E_1(\lambda)$. Entonces, podemos formar una base de V que lleve vectores propios y la matriz asociada es diagonal. A estos endomorfismos se les suele llamar endomorfismos **diagonalizables** y a la forma canónica de Jordan su **forma diagonal**.