3. Subespacios fundamentales generalizados.

Para solucionar el problema que nos hemos planteado, necesitamos introducir unos subespacios, los llamados **subespacios fundamentales generalizados**, que van a ser un tipo de subespacios f-invariantes. Recordemos que dado un endomorfismo $f : V \to V$ de un K-espacio vectorial V, un subespacio W de V se dice que es f**-invariante** si $f(W) \subseteq W$.

Una característica importante de los subespacios f-invariantes es que si $W \subseteq V$ es un subespacio f-invariante de V y $f : V \to V$, entonces $f|_W : W \to W$ es un endomorfismo de W. Por ello, es interesante escribir V como suma directa de subespacios f invariantes porque $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_t$, con W_i, $i = 1 \ldots t$, subespacios f-invariantes, si y sólo si existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma: $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t \end{pmatrix}$. Así, si queremos que la matriz asociada a f sea una matriz triangular con las características indicadas, una buena aproximación puede ser expresar V como suma directa de subespacios f-invariantes y luego en cada uno de los subespacios f-invariantes intentar buscar una base respecto de la cual la matriz asociada tenga la forma pedida.

Definición. Dado un valor propio λ de un endomorfismo f se llama j**-ésimo subespacio fundamental generalizado** al conjunto

$$E_j(\lambda) = \{v \in V \mid (f - \lambda 1_V)^j(v) = 0_V\},$$

esto es $E_j(\lambda) = \ker(f - \lambda 1_V)^j$.

Es obvio que $E_j(\lambda)$ es un subespacio vectorial f-invariante de V. Además, $E_1(\lambda) = V(\lambda)$.

Resumimos las propiedades de estos subespacios fundamentales generalizados:

Proposición 3.1. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y λ un valor propio de f. Entonces,*

(i) $E_j(\lambda)$ es un subespacio f-invariante.

(ii) Existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_t(\lambda) = E_{t+1}(\lambda) = \ldots$.

(iii) Si $v \in E_s(\lambda)$, entonces $(f - \lambda 1_V)^j(v) \in E_{s-j}(\lambda)$, para $0 < j < s$.

(iv) Si $v \in E_s(\lambda) - E_{s-1}(\lambda)$, entonces $(f - \lambda 1_V)^j(v) \in E_{s-j}(\lambda) - E_{s-j-1}(\lambda)$.

Al subespacio $E_t(\lambda)$ en el que se estabiliza la cadena de subespacios generalizados $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_t(\lambda) = E_{t+1}(\lambda) = \ldots$ se le llama **subespacio fundamental generalizado máximo** y verifica $\dim(E_t(\lambda)) = m(\lambda)$, siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad algebraica del valor propio λ. Se denotará por $E^*(\lambda)$.

Por otro lado tenemos:

Proposición 3.2. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal, $\lambda_1, \ldots \lambda_j$ j valores propios distintos dos a dos y $v_i \in E^*(\lambda_i) - \{0_V\}$, para $i = 1, \ldots, j$. Entonces $\{v_1 \ldots, v_j\}$ es un conjunto libre.*

Además,

Proposición 3.3. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \ldots (x - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}$. Entonces, $V = E^*(\lambda_1) \oplus E^*(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E^*(\lambda_s)$.*

Como los subespacios fundamentales generalizados son f-invariantes, podemos deducir de la proposición anterior que si tomamos como base de V una que esté formada por la unión de bases de los $E^*(\lambda_j)$, entonces la matriz asociada a F será una matriz diagonal por bloques. Sólo nos falta saber cómo se deben de elegir las bases de los $E^*(\lambda_j)$ para que cada bloque sea triangular.