Tema 2: Forma canónica de Jordan de un endomorfismo.

1. Planteamiento del problema.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $f : V \to V$ un endomorfismo de V, esto es, una aplicación lineal de V en V. Estamos interesados en buscar una base V respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible, esto es tenga el mayor número posible de '0' en sus casillas. Por ello, en este tema analizamos el problema de saber cuando un endomorfismo admite como matriz asociada una matriz triangular superior. Además, en caso de que sea posible, nos interesará localizar una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea triangular. Recordemos que dada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se dice que A es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $1 \leq j < i$.

Definición. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Se dice que f es **triangularizable** si existe una base $\mathfrak{B}$ de V (que tomaremos tanto en origen como en llegada) respecto de la cual la matriz asociada a f es triangular superior.

En el problema de triangularización, observamos lo siguiente: dado un endomorfismo triangularizable pueden existir dos matrices triangulares superiores diferentes que sean asociadas al endomorfismo dado. Por ejemplo, si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x, x + y + z, z)$, entonces la matriz asociada a f respecto de la base $\{(0, \frac{1}{3}, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y si elegimos como base para $\mathbb{R}^3$ a $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ la matriz asociada a f es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, podemos tener más de una matriz triangular superior que esté asociada a f. Por ello, vamos a imponer más condiciones: si un endomorfismo es triangularizable, intentaremos localizar la matriz triangular superior con mayor número de ceros posibles en sus entradas tal que sea asociada al endomorfismo dado. A esta matriz le pediremos también que en las casillas $(i, i+1)$, para $i = 1, \dots, n$, siendo $n = \dim(V)$, sólo puedan aparecer '0' o '1' y las casillas (i, j) con $j > i + 1$ tome el valor '0'. Esta matriz será la una matriz de Jordan que se conoce como **forma canónica de Jordan** del endomorfismo f. En este tema veremos que condiciones debe cumplir f para que exista y cómo localizar una base respecto de la cuál sea su matriz asociada la forma canónica de Jordan.

2. Endomorfismos triangularizables.

Damos una caracterización sencilla de los endomorfismos triangularizables.

Teorema 2.1. (Caracterización de endomorfismos triangularizables) *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Entonces, f es triangularizable si y sólo si su polinomio característico se escinde sobre K.*

Para demostrar que todo endomorfismo triangularizable tiene un polinomio característico que se escinde sobre K, sólo hay que fijarse que si f es triangularizable, entonces existe una matriz triangular $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ que es matriz asociada a él y el polinomio característico de f $\chi_f(x)$ coincide con $\chi_T(x) = (x - t_{11}) \dots (x - t_{nn})$, que se escinde sobre K. Para demostrar que si el polinomio característico se escinde sobre K, entonces f es triangularizable necesitamos hallar la que se conoce como forma canónica de Jordan, que lo haremos en los siguientes apartados.

Ejemplo. Si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x, x + y + z, z)$, entonces f es triangularizable porque $\chi_f(x) = (x - 1)^3$ y se escinde sobre $\mathbb{R}$.

3. Subespacios fundamentales generalizados.

Para solucionar el problema que nos hemos planteado, necesitamos introducir unos subespacios, los llamados **subespacios fundamentales generalizados**, que van a ser un tipo de subespacios f-invariantes. Recordemos que dado un endomorfismo $f : V \to V$ de un K-espacio vectorial V, un subespacio W de V se dice que es **f-invariante** si $f(W) \subseteq W$.

Una característica importante de los subespacios f-invariantes es que si $W \subseteq V$ es un subespacio f-invariante de V y $f : V \to V$, entonces $f|_W : W \to W$ es un endomorfismo de W. Por ello, es interesante escribir V como suma directa de subespacios f invariantes porque $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_t$, con W_i, $i = 1 \dots t$, subespacios f-invariantes, si y sólo si existe una base de V, $\mathfrak{B}_V$, respecto de la cual la matriz asociada $M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es diagonal por bloques de la forma: $M_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t \end{pmatrix}$. Así, si queremos que la matriz asociada a f sea una matriz triangular con las características indicadas, una buena aproximación puede ser expresar V como suma directa de subespacios f-invariantes y luego en cada uno de los subespacios f-invariantes intentar buscar una base respecto de la cual la matriz asociada tenga la forma pedida.

Definición. Dado un valor propio λ de un endomorfismo f se llama **j-ésimo subespacio fundamental generalizado** al conjunto

$$E_j(\lambda) = \{v \in V \mid (f - \lambda 1_V)^j(v) = 0_V\},$$

esto es $E_j(\lambda) = \ker(f - \lambda 1_V)^j$.

Es obvio que $E_j(\lambda)$ es un subespacio vectorial f-invariante de V. Además, $E_1(\lambda) = V(\lambda)$.

Resumimos las propiedades de estos subespacios fundamentales generalizados:

Proposición 3.1. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y λ un valor propio de f. Entonces,*

(i) $E_j(\lambda)$ es un subespacio f-invariante.

(ii) Existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_t(\lambda) = E_{t+1}(\lambda) = \ldots$.

(iii) Si $v \in E_s(\lambda)$, entonces $(f - \lambda 1_V)^j(v) \in E_{s-j}(\lambda)$, para $0 < j < s$.

(iv) Si $v \in E_s(\lambda) - E_{s-1}(\lambda)$, entonces $(f - \lambda 1_V)^j(v) \in E_{s-j}(\lambda) - E_{s-j-1}(\lambda)$.

Al subespacio $E_t(\lambda)$ en el que se estabiliza la cadena de subespacios generalizados $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_t(\lambda) = E_{t+1}(\lambda) = \ldots$ se le llama **subespacio fundamental generalizado máximo** y verifica $\dim(E_t(\lambda)) = m(\lambda)$, siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad algebraica del valor propio λ. Se denotará por $E^*(\lambda)$.

Por otro lado tenemos:

Proposición 3.2. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal, $\lambda_1, \ldots \lambda_j$ j valores propios distintos dos a dos y $v_i \in E^*(\lambda_i) - \{0_V\}$, para $i = 1, \ldots, j$. Entonces $\{v_1 \ldots, v_j\}$ es un conjunto libre.*

Además,

Proposición 3.3. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \ldots (x - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}$. Entonces, $V = E^*(\lambda_1) \oplus E^*(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E^*(\lambda_s)$.*

Como los subespacios fundamentales generalizados son f-invariantes, podemos deducir de la proposición anterior que si tomamos como base de V una que esté formada por la unión de bases de los $E^*(\lambda_j)$, entonces la matriz asociada a F será una matriz diagonal por bloques. Sólo nos falta saber cómo se deben de elegir las bases de los $E^*(\lambda_j)$ para que cada bloque sea triangular.

4. Bloques básicos de Jordan. Obtención de la forma canónica de Jordan.

Tras haber introducido en el apartado anterior los subespacios fundamentales generalizados, en ésta nos encontramos en disposición de dar un método que permita obtener la forma canónica de Jordan de una matriz o de un endomorfismo triangularizable.

Definición. Un **bloque básico de Jordan** de orden m para el valor propio λ es una matriz $J_m(\lambda) = (j_{kl}) \in Mat_{m\times m}(K)$ definida por $j_{kl} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } k = l; \\ 1, & \text{si } l = k+1; \\ 0, & \text{si } l \neq k, k+1. \end{cases}$ Una **matriz de Jordan** J es una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son bloques básicos de Jordan.

Dado un endomorfismo triangularizable f se llama **forma canónica de Jordan del endomorfismo** f a una matriz de Jordan que sea matriz asociada al endomorfismo f. La forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable es única salvo el orden de los bloques básicos de Jordan.

La existencia de la forma canónica de Jordan de un endomorfismo se demuestra en este apartado mediante la construcción de dicha matriz de Jordan. De hecho, nos centramos en dar un método que permita calcular la forma canónica de Jordan de un endomorfismo. El proceso consiste en elegir adecuadamente los vectores de los subespacios fundamentales generalizados para que la matriz asociada a sea de la forma buscada. En esencia, el proceso consiste en ir tomando vectores linealmente independientes que se encuentren en un eslabón de la cadena de subespacios fundamentales generalizados asociados a un valor propio y no en el eslabón anterior, comenzando por vectores que estén en el subespacio generalizado máximo. Empleando estos vectores, se genera una familia de vectores linealmente independientes que formarán la base respecto de la cual la matriz asociada es una matriz de Jordan. En concreto el proceso a seguir es el siguiente:

Algoritmo para calcular la forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable

Paso 1: Se calcula el polinomio característico de f: $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)^{m(\lambda_1)} \ldots (x-\lambda_s)^{m(\lambda_s)}$

Paso 2: Para cada valor propio λ se calcula la cadena de subespacios fundamentales generalizados: $E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_t(\lambda) = E^*(\lambda)$.

Paso 3: Se escribe $E^*(\lambda) = E_{t-1}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$. Para ello, se localizan $l = \dim(E^*(\lambda)) - \dim(E_{t-1}(\lambda))$ vectores linealmente independientes de $E^*(\lambda) - E_{t-1}(\lambda)$, de forma que $F_t(\lambda) =< v_{1t} \ldots v_{lt} >$ verifique $E^*(\lambda) = E_{t-1}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$.

Paso 4: Para cada vector v_{it} se calculan los vectores: $(f - \lambda 1_V)^j(v_{it})$, para $j =$

$0, \ldots, t-1$.

Paso 5: Si $< \{v_{1t}, (f-\lambda 1_V)(v_{1t}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{1t}), \ldots, v_{lt}, (f-\lambda 1_V)(v_{lt}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{lt}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{lt})\} >$ coincide con $E^*(\lambda)$, el proceso para este valor propio ha finalizado. En caso contrario, se localiza el mayor número posible de vectores de $E_{t-1}(\lambda) - E_{t-2}(\lambda)$ que sean linealmente independientes con los que ya tenemos $\{v_{1t}, (f-\lambda 1_V)(v_{1t}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{1t}), \ldots, v_{lt}, (f-\lambda 1_V)(v_{lt}), (f-\lambda 1_V)^2(v_{lt}), \ldots, (f-\lambda 1_V)^{t-1}(v_{lt})\}$ para descomponer $E_{t-1}(\lambda) = E_{t-2}(\lambda) \oplus S_{t-1}(\lambda)$ teniendo en cuenta que de $S_{t-1}(\lambda)$ conocemos ya los vectores $\{(f-\lambda 1_V)(v_{1t}), \ldots, (f-\lambda 1_V)(v_{lt})\}$. El número de vectores nuevos que debemos localizar viene dado por $\dim(E_{t-1}(\lambda)) - \dim(E_{t-2}(\lambda)) - l$. Si no es posible encontrar aquí, se va bajando en los eslabones de la cadena hasta conseguir nuevos vectores.

Paso 6: Supongamos que hemos hallado un vector $v \in E_j(\lambda) - E_{j-1}(\lambda)$ tal que es linealmente independiente con el conjunto que tenemos. Entonces, calculamos $(f-\lambda 1_V)^k(v)$ para $k = 0, \ldots, j-1$.

Paso 7: El proceso anterior continua hasta que obtengamos $m(\lambda)$ vectores, contando cada vector y sus imágenes sucesivas.

Paso 8: Se calcula la matriz asociada a f respecto de la base formada por los vectores junto con sus imágenes sucesivas (en orden inverso) que se han hallado para cada $E^*(\lambda)$. Por la forma de elegir vectores, sale una matriz de Jordan, que es la forma canónica de Jordan del endomorfismo f. En esta matriz de Jordan aparece un bloque básico de Jordan por cada grupo formado por un vector y sus imágenes sucesivas.

Ejemplo. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $f((x,y,z,t)) = (x, y, 2x-y+z, -6x+3y+3z+2t)$, su polinomio característico viene dado por $\chi_f(x) = (x-1)^3(x-2)$. Localizamos su forma canónica de Jordan y una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea su forma canónica de Jordan.

1. Para el valor propio 1 localizamos la cadena de subespacios fundamentales generalizados. Esta cadena tiene dos eslabones:

$$E_1(1) = V(1) = \{(x, 2x, z, -3z) | x, z \in \mathbb{R}\}$$

y

$$E^*(1) = E_2(1) = \{(x, y, z, -3z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Elegimos un vector de $E^*(1) - E_1(1)$. Por ejemplo $(0,1,0,0)$. Calculamos

$$f((0,1,0,0)) - (0,1,0,0) = (0,0,-1,3) \in E_1(1).$$

2. Necesitamos un vector más de $E^*(1)$ que sea linealmente independiente con $\{(0,1,0,0), (0,0,-1,3)\}$ porque la multiplicidad algebraica del valor propio 1 es 3. No

podemos elegirlo en $E^*(1) - E_1(1)$ porque la diferencia de dimensiones entre $E^*(1)$ y $E_1(1)$ es 1. Así que, bajamos un eslabón en la cadena y lo localizamos en $E_1(1) - \{(0,0,0,0)\}$. Como debe ser linealmente independiente con $\{(0,1,0,0),(0,0,-1,3)\}$, tomamos el vector $(1,2,0,0)$. Por tanto, para el valor propio 1, consideramos el conjunto de vectores $\{(0,0,-1,3),(0,1,0,0),(1,2,0,0)\}$. Observamos que $(0,0,-1,3)$ y $(0,1,0,0)$ están colocados en orden inverso a como los hemos generado para que el bloque básico asociado sea de Jordan.

3. Para el valor propio 2, $E^*(2) = E_1(2) = \{(0,0,0,x_4) | x_4 \in \mathbb{R}\}$ y debemos elegir un único vector propio asociado a este valor propio porque la multiplicidad algebraica del valor propio 2 es 1a. Elegimos como vector propio a $(0,0,0,1)$.

4. Podemos formar ya la base respecto de la cual la matriz asociada a f sea una matriz de Jordan. La base que buscamos es $\{(0,0,-1,3),(0,1,0,0),(1,2,0,0),(0,0,0,1)\}$ y la forma canónica de Jordan de f es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nota: Puede ocurrir que la forma canónica de Jordan de un endomorfismo $f : V \to V$ nos dé una matriz diagonal. Esto sucede cuando para cada valor propio λ del polinomio característico de f el subespacio fundamental generalizado máximo es $E_1(\lambda)$. Entonces, podemos formar una base de V que lleve vectores propios y la matriz asociada es diagonal. A estos endomorfismos se les suele llamar endomorfismos **diagonalizables** y a la forma canónica de Jordan su **forma diagonal**.