4. Polinomio característico.

Para poder obtener de forma sencilla los valores propios de una matriz o de un endomorfismo utlizaremos lo que se conoce como **polinomio característico**. Si $A \in Mat_{n\times n}(K)$, se llama polinomio característico a $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ y se llama **ecuación característica** a $\chi_A(x) = 0$. Es fácil probar que si $A \in Mat_{n\times n}(K)$, las raíces de $\chi_A(x) = 0$ que están en K son los valores propios de A.

Si $f : V \to V$ es un endomorfismo y A y B son dos matrices asociadas a f respecto de $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, respectivamente, entonces $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ y por ello se puede definir el concepto de **polinomio carateristíco de un endomorfismo**: es el polinomio característico de cualquier matriz asociada a él y se denotará por $\chi_f(x)$. Además, es fácil probar que los valores propios del endomorfismo f son precisamente las raíces de su polinomio caraterírìstico.

Por ejemplo, si tomamos $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f((x,y,z,t)) = (x+y+z, y+2z+t, z-x+t, -x+y+z+t)$ la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$\chi_f(x) = \left| \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & x-1 \end{pmatrix} \right| = x^2(x^2-4x+5).$$

Por tanto, $\lambda = 0$ es un valor propio de f.