3. Valores y vectores propios de un endomorfismo y de una matriz.

Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo. Un escalar $\lambda \in K$ se dice que es un **valor propio** de f si existe $v \in V - \{0_V\}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $\lambda \in K$ es un valor propio de f y $v \in V - \{0_V\}$ verifica que $f(v) = \lambda v$, se dice que V es un **vector propio** asociado a λ de f.

Si λ es un valor propio del endomorfismo $f : V \to V$, entonces el conjunto

$$V(\lambda) = \{v \in v \mid f(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio vectorial no nulo, llamado **subespacio fundamental** asociado al valor propio λ. Además, si $v \in V(\lambda)$, entonces $f(v) \in V(\lambda)$. Por tanto, si se restringe f a $V(\lambda)$, la aplicación $f|_{V(\lambda)} : V(\lambda) \to V(\lambda)$ es un endomorfismo de $V(\lambda)$ y es claro que si $\dim V(\lambda) = s$, entonces la matriz asociada a $f|_{V(\lambda)}$ tomando la base $\mathfrak{B}_{V(\lambda)}$ es de la forma λI_s.

Es fácil probar que si V es un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ es un endomorfismo, $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ son r valores propios distintos de f y $v_i \in V(\lambda_i)$ un vector propio asociado al valor propio λ_i, para $i = 1, \ldots, r$, entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto libre.

De forma análoga se define el concepto de valor y vector propio asociado a una matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Así, Dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ y un escalar $\lambda \in K$ se dice que λ es un **valor propio** de A si existe $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in Mat_{n\times 1}(K) - \{(0 \ldots 0)\}$ tal que $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. A $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ le denominaremos **vector propio** asociado al valor propio λ.

Si $A \in Mat_{n\times n}(K)$ y $V_A(\lambda)$ es el subconjunto formado por todos los vectores propios asociados al valor propio λ y el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, esto es

$$V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) | A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\},$$

se puede demostrar que $V_A(\lambda)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$