2. Aplicación lineal y su matriz asociada.

Sean V y W dos K-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación lineal** si se verifica la siguiente condición:

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v'), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall v, v' \in V.$$

Las aplicaciones lineales también suelen recibir el nombre de **homomorfismos** entre espacios vectoriales. Un **monomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ inyectiva. Un **epimorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ sobreyectiva. Un **isomorfismo** entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación lineal $f : V \to W$ biyectiva. Si $V = W$ y $f : V \to V$ es una aplicación lineal, se dice que f es un **endomorfismo** del espacio vectorial V y si además es biyectiva, se dice que es un **automorfismo** de V.

Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f((x, y, z, t)) = (x + y + z, y + 2z + t, z - x, y - 2x)$ es lineal y también recibe el nombre de endomorfismo del espacio $\mathbb{R}^4$.

Las aplicaciones lineales f tienen diversas propiedades. Así, si $f : V \to W$ una aplicación lineal, entonces

(i) $f(0_V) = 0_W$.

(ii) $f(-v) = -f(v)$, $\forall v \in V$.

(iii) $f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_i \in K$, $\forall v_i \in V$.

(iv) Si $\{v_1, \ldots v_m\}$ es un subconjunto ligado de V, entonces $\{f(v_1), \ldots f(v_m)\}$ es un subconjunto ligado de W.

La propiedad (iii) nos indica que si $f : V \to W$ es una aplicación lineal y conocemos los valores $f(v_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, siendo $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, podemos calcular $f(v)$ para cualquier v. Esto es, a partir de las n imágenes de los vectores de una base, se puede determinar la imagen de cualquier vector v.

Además, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W, entonces dado un vector $v \in V$, podemos expresar $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j,$$

siendo $f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$. Por tanto, podemos dar la siguiente **expresión matricial** de

$f(v)$:

$$f(v) = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

A la matriz $A = (a_{ij})$ se le denomina **matriz asociada a f respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$**. La matriz A lleva en en la columna i-ésima las coordenadas de los vectores $f(v_i)$ en la base $\mathfrak{B}_W$. Si queremos indicar quiénes son las bases que intervienen a la hora de calcular la matriz asociada a f escribiremos: $M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}_W}(f)$ para denotar la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$.

Por ejemplo, si tomamos la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f((x, y, z, t)) = (x+y+z, y+2z+t, z-x+t, -x+y+z+t)$ y elegimos en $\mathbb{R}^4$ la base $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, entonces la matriz asociada a f tomando en origen y llegada a $\mathfrak{B}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se puede dar una interpretación sencilla de una matriz de cambio de coordenadas $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$: es la matriz asociada a la aplicación identidad de V cuando se toman en origen y llegada las bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, respectivamente.

Asimismo, si tenemos una aplicación lineal $f : V \to W$, A es la matriz asociada a f con respecto a las bases $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}_W$ y B es la matriz asociada a f con respecto de las bases $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}'_W$, entonces B se pude expresar en términos de A mediante la fórmula

$$B = M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}'_W} A M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V},$$

siendo $M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}$ la matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}'_V$ a $\mathfrak{B}_V$ y $M_{\mathfrak{B}_W,\mathfrak{B}'_W}$ la matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_W$ a $\mathfrak{B}'_W$.