1. Conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales y bases.

Definición. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(V, +)$ un grupo abeliano. Se dice que V es un K-**espacio vectorial**, si existe una aplicación $f : K \times V \to V$ que verifica las cuatro propiedades siguientes:

(i) $f((1_K, v)) = v$, $\forall v \in V$

(ii) $f((\lambda_1 + \lambda_2, v)) = f((\lambda_1, v)) + f((\lambda_2, v))$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

(iii) $f((\lambda, v_1 + v_2)) = f((\lambda, v_1)) + f((\lambda, v_2))$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

(iv) $f((\lambda_1\lambda_2, v)) = f((\lambda_1, f(\lambda_2, v)))$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

A esta aplicación se la denomina **multiplicación por un escalar** y se suele emplear la siguiente notación: $f(\lambda, v) = \lambda v$. A los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo K **escalares**. Si está claro en qué cuerpo estamos trabajando, a los K-espacios vectoriales se les dice simplemente espacios vectoriales.

Los ejemplos más usuales de espacios vectoriales son:

(1) $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$, donde

$$\mathrm{Mat}_{n\times m}(K) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

tomando como operacin interna + a la suma usual de matrices:

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad (a_{ij})(b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

y la multiplicación por un escalar siguiente:

$$\forall \lambda \in K, \forall (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

(2) $K^n = \{(k_1, \ldots, k_n) | k_i \in K, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ con la siguiente operación interna:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n,\ (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y la multiplicación por un escalar:

$$\forall \lambda \in K, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n,\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

En todo K-espacio vectorial V se verifican las siguientes propiedades:

1. $\lambda 0_V = 0_V$, $\forall \lambda \in K$.

2. $0_K v = 0_V$, $\forall v \in V$.

3. $(-1_K)v = -v$, $\forall v \in V$.

4. Si $\lambda \in K$ y $v \in V$ verifican que $\lambda v = 0_V$, entonces $\lambda = 0_K$ ó $v = 0_V$.

Dentro de un K-espacio vectorial nos podemos encontrar subconjuntos que ellos mismos tengan estructura de K-espacio vectorial con las operaciones dadas restringidas a ellos. Son los K-**subespacios vectoriales**. Para saber si un subconjunto $S \subseteq V$ es un K-subespacio vectorial, utilizamos la siguiente caracterización

Proposición 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces, son equivalentes*

1. *S es un K- subespacio vectorial de V.*

2. $\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 + s_2 \in S$ *y* $\forall \lambda \in K, \forall s \in S, \quad \lambda s \in S$.

3. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall s_1, s_2 \in S, \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$.

Por ejemplo,

(1) Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cualquier recta que pase por el $(0,0,0)$ o plano que lo contenga es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Así, $S = \{(2y, y, -y) | y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall (2y_1, y_1, -y_1), (2y_2, y_2, -y_2) \in S$ se cumple

$$\lambda_1(2y_1, y_1, -y_1) + \lambda_2(2y_2, y_2, -y_2) = (2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2 y_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, -\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2) \in S.$$

Sin embargo, $T = \{(x, y, z) | x - 2y = 2, z + y = 0\}$ no es subespacio vectorial porque $(4, 1, -1), (6, 2, -2) \in T$ y en cambio $(4, 1, -1) + (6, 2, -2) = (10, 3, -3) \notin T$.

(2) Si V un K-espacio vectorial y $T = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq V$. Entonces, el conjunto

$$S =< s_1, \ldots, s_m >= \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i | \alpha_i \in K, i = 1, \cdots, m\}$$

es un subespacio vectorial de V, llamado subespacio vectorial generado por los vectores de $\{s_1, \ldots, s_m\}$.

Los subespacios vectoriales son interesantes porque, entre otras propiedades, se cumple que al sumar o intersecar un número finito de subespacios vectoriales obtenemos otro subespacio vectorial, esto es, si V es un K-espacio vectorial y S_1, S_2, $\ldots$, S_r son r K-subespacios vectoriales de V el conjunto

$$\cap_{i=1}^{r} S_i = \{v \in V | v \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}$$

es un subespacio vectorial llamado **subespacio intersección** de S_1, S_2, …, S_r y

$$\sum_{i=1}^{r} S_i = \{v_1 + \ldots + v_r \in V | v_i \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

es un subespacio vectorial de V llamado **subespacio suma** de S_1, S_2, …, S_r. Diremos que V es **suma directa** de S_1, S_2, …, S_r, y se escribe $V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

(i) $\sum_{i=1}^{r} S_i = V$.

(ii) $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, $S_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} S_j = \{0_V\}$.

Otro de los conceptos claves en un espacio vectorial V es el de base de un espacio vectorial. Un subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq V$ es una base de V si cualquier vector de V se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de $\mathfrak{B}$. Trabajaremos en espacios vectoriales de dimensión finita, esto es, aquellos cuyas bases tienen un número finito de elementos. Es conocido que si V es un espacio vectorial de dimensión finita todas sus bases tienen el mismo cardinal que recibe el nombre de **dimensión** del espacio vectorial. Por ejemplo,

(1) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ el conjunto $\mathfrak{B} = \{(1,0,0,...), (0,1,0,...), (0,...,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.

(2) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el conjunto $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y su dimensión es 6.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n y una base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, sabemos que existen unos únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ a los que se les llaman **coordenadas del vector** v en la base $\mathfrak{B}$.

Para denotar las coordenadas de un vector emplearemos la notación siguiente $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas del vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ en la base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Por ejemplo, si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, y elegimos como base de $\mathbb{R}^4$ a $\mathfrak{B} = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$, el vector $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ se expresa como combinación lineal de vectores de $\mathfrak{B}$ mediante:

$$(1,2,3,4) = 1(1,1,1,1) + 1(0,1,1,1) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1).$$

Por tanto, el vector $(1,2,3,4)$ tiene por coordenadas en la base $\mathfrak{B}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En un K-espacio vectorial V de dimensión finita n, podemos tener dos bases $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y dado un vector $v \in K$, sabemos que existen unos únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ tales que

$$v = (v_1 \ldots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$v = (u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de v respecto de las bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, respectivamente. Podemos relacionar ambas coordenadas mediante la **matriz de cambio de coordenadas**

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

donde $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ es la matriz que lleva en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$. Es decir, en la primera columna aparecen las coordenadas de v_1 en la base $\mathfrak{B}_2$, en la segunda columna, vienen las coordenadas de v_2 en la base $\mathfrak{B}_2$ y así sucesivamente. La denotaremos por $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$.

Por ejemplo, si en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ elegimos las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ la matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ viene dada por:

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo que hemos definido $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$, podemos hallar $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$. Es inmediato que

$$M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} = I_n = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Por tanto, $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y $M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$ son matrices inversibles y $M^{-1}_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1}$.