3. Obtención de la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable.

Para obtener la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable seguimos el siguiente algoritmo:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico de A: $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (x-\lambda_s)^{m(\lambda_s)}$

Paso 2: Para cada valor propio λ se calcula la cadena de subespacios fundamentales generalizados: $E_{1,A}(\lambda) \subsetneqq E_{2,A}(\lambda) \subsetneqq \dots \subsetneqq E_{t,A}(\lambda) = E_A^*(\lambda)$.

Paso 3: Se escribe $E^*(\lambda) = E_{t-1,A}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$. Para ello, se localizan $l = \dim(E^*(\lambda)) - \dim(E_{t-1,A}(\lambda))$ vectores linealmente independientes de $E^*(\lambda) - E_{t-1,A}(\lambda)$, de forma que $F_t(\lambda) =< v_{1t} \dots v_{lt} >$ verifique $E^*(\lambda) = E_{t-1,A}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$.

Paso 4: Para cada vector $v_{it} \in Mat_{n\times 1}(K)$ hallados en el paso anterior se calculan los vectores: $(A-\lambda I_n)^j v_{it}$, para $j = 0, \dots, t-1$.

Paso 5: Si $< \{v_{1t}, (A-\lambda I_n)v_{it}, (A-\lambda I_n)^2 v_{it}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{it}, \dots, v_{lt}, (A-\lambda I_n)v_{lt}, (A-\lambda I_n)^2 v_{lt}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{lt}\} >$ coincide con $E^*(\lambda)$, el proceso para este valor propio ha finalizado. En caso contrario, se localiza el mayor número posible de vectores de $E_{t-1,A}(\lambda) - E_{t-2,A}(\lambda)$ que sean linealmente independientes con los que ya tenemos $\{v_{1t}, (A-\lambda I_n)v_{it}, (A-\lambda I_n)^2 v_{it}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{it}, \dots, v_{lt}, (A-\lambda I_n)v_{lt}, (A-\lambda I_n)^2 v_{lt}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{lt}\}$ para descomponer $E_{t-1,A}(\lambda) = E_{t-2,A}(\lambda) \oplus S_{t-1}(\lambda)$ teniendo en cuenta que de $S_{t-1}(\lambda)$ conocemos ya los vectores $\{(A-\lambda I_n)v_{1t}, \dots, (A-\lambda I_n)v_{lt}\}$. El número de vectores nuevos que debemos localizar viene dado por $\dim(E_{t-1,A}(\lambda)) - \dim(E_{t-2,A}(\lambda)) - l$. Si no es posible encontrar aquí, se va bajando en los eslabones de la cadena hasta conseguir nuevos vectores.

Paso 6: Supongamos que hemos hallado un vector $v \in E_{j,A}(\lambda) - E_{j-1,A}(\lambda)$ tal que es linealmente independiente con el conjunto que tenemos. Entonces, calculamos $(A-\lambda I_n)^k v$ para $k = 0, \dots, j-1$.

Paso 7: El proceso anterior continua hasta que obtengamos $m(\lambda)$ vectores, contando cada vector y sus imágenes sucesivas para cada valor propio λ.

Paso 8: Se calcula la matriz de paso P que lleva en sus columnas los vectores hallados junto con sus imágenes sucesivas (en orden inverso) que se han hallado para cada $E^*(\lambda)$. Entonces, PAP^{-1} nos da una matriz de Jordan que es semejante a la matriz A. También se puede determinar J sin necesidad de calcular P teniendo en cuenta que por cada vector con sus imágenes sucesivas debemos crear un bloque básico de Jordan para λ de tamano el cardinal del conjunto formado por el vector con sus imágenes sucesivas.