## 1. Planteamiento del problema. Matrices semejantes. Matrices triangularizables.

El problema que nos planteamos en este tema es el siguiente: dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ queremos saber bajo que condiciones existe una matriz inversible $P$ y una matriz triangular superior $T$ tales que $A = PTP^{-1}$. Cuando esto suceda se dirá que $A$ es una **matriz triangularizable**.

Recordemos que dada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se dice que $A$ es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $1 \leq j < i$.

Asimismo estableceremos la relación que existe entre este problema y el abordado en el tema anterior en el que se estudiaba bajo que condiciones un endomorfismo $f : V \to V$ del $K$-espacio vectorial $V$ admitía una base de $V$ respecto de la cual la matriz asociada a $f$ era triangular superior, esto es, $f$ es un endomorfismo triangularizable. Veremos que ambos problemas están relacionados. En efecto, si nos dan una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a cierto endomorfismo $f$ de un $K$-espacio vectorial $V$ de dimensión $n$ y si $f$ es triangulariazable, entonces teniendo en cuenta la relacin existente entre matrices asociadas a la misma aplicación lineal la matriz propuesta $A$ será también triangularizable. Recíprocamente, dado un endomorfismo $f$ de un $K$-espacio vectorial $V$ de dimensión $n$ el estudiar si $f$ es triangularizable equivale a analizar si una matriz asociada a $f$ respecto de una base $\mathfrak{B}_V$ es triangularizable. Por tanto, ver si una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es triangularizable es equivalente a estudiar si el endomorfismo asociado a ella es triangularizable.

Recordemos que

**Definición.** Dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz inversible, $P$, llamada matriz de paso, tal que $A = PBP^{-1}$.

Obviamente, si $A = M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y $B = M_{\mathfrak{B}'_V}(f)$ son las matrices asociadas a un mismo endomorfismo $f$ de un espacio vectorial $V$, entonces son semejantes ya que $A = M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}'_V} B M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}$, donde $M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}$ es la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}'_V$ a $\mathfrak{B}_V$.

Estas dos últimas definiciones permiten dar otra definición equivalente de matrices triangularizables: una matriz es triangularizable si es semejante a una matriz triangular superior. Además, si $A$ es una matriz triangularizable, observamos que todas las matrices semejantes a ella son también triangularizables.

Asimismo, podremos determinar si dos matrices triangularizables son o no semejantes y, en caso de serlo, localizar una matriz de paso.

Al igual que sucedía en el estudio de los endomorfismos triangularizables, en el problema de triangularización de matrices, observamos lo siguiente: dada una matriz triangularizable pueden existir dos matrices triangulares superiores diferentes que sean asociadas a la matriz dada. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ya que $A = P^{-1}BP$, con $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pero $A$ también es semejante a $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con matriz de paso $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Por ello, vamos a imponer más condiciones: si una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es triangularizable, intentaremos localizar la matriz triangular superior con mayor número de '0' posibles en sus entradas tal que sea semejante a la matriz dada. A esta matriz le pediremos también que en las casillas $(i, i+1)$, para $i = 1, \ldots, n$, siendo $n = \dim(V)$, sólo puedan aparecer '0' o '1' y las casillas $(i, j)$ con $j > i + 1$ tome el valor '0'. Esta matriz será una matriz de Jordan que se conoce como la **forma canónica de Jordan** de la matriz $A$. En este tema veremos que condiciones debe cumplir $A$ para que exista una matriz $P$ inversible y cómo localizarla tal que $A$ sea semejante a $J$, forma canónica de Jordan de $A$, con matriz de paso $P$.

**Definición.** Dada una matriz triangularizable $A$, se llama **forma canónica de Jordan de** $A$ a una matriz de Jordan que sea semejante a $A$.

De nuevo, la forma canónica de Jordan de una matriz $A$ triangularizable es única salvo el orden de los bloques básicos de Jordan. Además, dos matrices triangularizables son semejantes si y sólo si tienen la misma forma canónica de Jordan y una matriz triangularizable es asociada a un endomorfismo $f$ si tiene la misma forma canónica de Jordan que éste.

En caso de matrices diagonalizables (esto es aquellas matrices que son semejantes a una matriz diagonal) la forma diagonal y la forma canónica de Jordan coinciden.

Se puede caracterizar las matrices triangularizables a través de su polinomio característico:

**Teorema 1.1. (Caracterización de matrices triangularizables)** *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Entonces, $A$ es triangularizable si y sólo si su polinomio característico se escinde sobre $K$.*

Para demostrar el Teorema anterior observamos que probar que si $A$ es triangularizable, entonces su polinomio característico se escinde sobre $K$ es sencillo. En efecto, si $A$ es triangularizable, entonces $A$ es semejante a una matriz triangular $T$ y los polinomios característicos de $A$ y $T$ coinciden por ser matrices semejantes. Ahora, $\chi_T(x) = (x - t_{11})\cdots(x - t_{nn})$, luego tiene a $t_{11}, \cdots, t_{nn}$ como raíces de $\chi_T(x) = 0$ y $\chi_T(x)$ se escinde sobre $K$.

Para ver la otra implicación veremos cómo se construye la forma canónica de Jordan de una matriz $A$ cuyo polinomio característico $\chi_A(x)$ se escinda sobre $K$ en los siguientes apartados de este tema.