Tema 3: Forma canónica de Jordan de una matriz.

1. Planteamiento del problema. Matrices semejantes. Matrices triangularizables.

El problema que nos planteamos en este tema es el siguiente: dada una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ queremos saber bajo que condiciones existe una matriz inversible P y una matriz triangular superior T tales que $A = PTP^{-1}$. Cuando esto suceda se dirá que A es una **matriz triangularizable**.

Recordemos que dada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ se dice que A es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $1 \leq j < i$.

Asimismo estableceremos la relación que existe entre este problema y el abordado en el tema anterior en el que se estudiaba bajo que condiciones un endomorfismo $f : V \to V$ del K-espacio vectorial V admitía una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f era triangular superior, esto es, f es un endomorfismo triangularizable. Veremos que ambos problemas están relacionados. En efecto, si nos dan una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ la podemos interpretar como la matriz asociada a cierto endomorfismo f de un K-espacio vectorial V de dimensión n y si f es triangulariazable, entonces teniendo en cuenta la relacin existente entre matrices asociadas a la misma aplicación lineal la matriz propuesta A será también triangularizable. Recíprocamente, dado un endomorfismo f de un K-espacio vectorial V de dimensión n el estudiar si f es triangularizable equivale a analizar si una matriz asociada a f respecto de una base $\mathfrak{B}_V$ es triangularizable. Por tanto, ver si una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es triangularizable es equivalente a estudiar si el endomorfismo asociado a ella es triangularizable.

Recordemos que

Definición. Dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz inversible, P, llamada matriz de paso, tal que $A = PBP^{-1}$.

Obviamente, si $A = M_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y $B = M_{\mathfrak{B}'_V}(f)$ son las matrices asociadas a un mismo endomorfismo f de un espacio vectorial V, entonces son semejantes ya que $A = M_{\mathfrak{B}_V,\mathfrak{B}'_V} B M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}$, donde $M_{\mathfrak{B}'_V,\mathfrak{B}_V}$ es la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}'_V$ a $\mathfrak{B}_V$.

Estas dos últimas definiciones permiten dar otra definición equivalente de matrices triangularizables: una matriz es triangularizable si es semejante a una matriz triangular superior. Además, si A es una matriz triangularizable, observamos que todas las matrices semejantes a ella son también triangularizables.

Asimismo, podremos determinar si dos matrices triangularizables son o no semejantes y, en caso de serlo, localizar una matriz de paso.

Al igual que sucedía en el estudio de los endomorfismos triangularizables, en el problema de triangularización de matrices, observamos lo siguiente: dada una matriz triangularizable pueden existir dos matrices triangulares superiores diferentes que sean asociadas a la matriz dada. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ya que $A = P^{-1}BP$, con $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pero A también es semejante a $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con matriz de paso $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Por ello, vamos a imponer más condiciones: si una matriz $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es triangularizable, intentaremos localizar la matriz triangular superior con mayor número de '0' posibles en sus entradas tal que sea semejante a la matriz dada. A esta matriz le pediremos también que en las casillas $(i, i+1)$, para $i = 1, \ldots, n$, siendo $n = \dim(V)$, sólo puedan aparecer '0' o '1' y las casillas (i, j) con $j > i+1$ tome el valor '0'. Esta matriz será una matriz de Jordan que se conoce como la **forma canónica de Jordan** de la matriz A. En este tema veremos que condiciones debe cumplir A para que exista una matriz P inversible y cómo localizarla tal que A sea semejante a J, forma canónica de Jordan de A, con matriz de paso P.

Definición. Dada una matriz triangularizable A, se llama **forma canónica de Jordan de** A a una matriz de Jordan que sea semejante a A.

De nuevo, la forma canónica de Jordan de una matriz A triangularizable es única salvo el orden de los bloques básicos de Jordan. Además, dos matrices triangularizables son semejantes si y sólo si tienen la misma forma canónica de Jordan y una matriz triangularizable es asociada a un endomorfismo f si tiene la misma forma canónica de Jordan que éste.

En caso de matrices diagonalizables (esto es aquellas matrices que son semejantes a una matriz diagonal) la forma diagonal y la forma canónica de Jordan coinciden.

Se puede caracterizar las matrices triangularizables a través de su polinomio característico:

Teorema 1.1. (Caracterización de matrices triangularizables) *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Entonces, A es triangularizable si y sólo si su polinomio característico se escinde sobre K.*

Para demostrar el Teorema anterior observamos que probar que si A es triangularizable, entonces su polinomio característico se escinde sobre K es sencillo. En efecto, si A es triangularizable, entonces A es semejante a una matriz triangular T y los polinomios característicos de A y T coinciden por ser matrices semejantes. Ahora, $\chi_T(x) = (x - t_{11}) \cdots (x - t_{nn})$, luego tiene a $t_{11}, \cdots, t_{nn}$ como raíces de $\chi_T(x) = 0$ y $\chi_T(x)$ se escinde sobre K.

Para ver la otra implicación veremos cómo se construye la forma canónica de Jordan de una matriz A cuyo polinomio característico $\chi_A(x)$ se escinda sobre K en los siguientes apartados de este tema.

2. Subespacios fundamentales generalizados asociados a un valor propio de una matriz.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ y λ un valor propio de A. Se llama **j-ésimo subespacio fundamental generalizado** al conjunto

$$E_{j,A}(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid (A - \lambda I_n)^j \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es fácil ver que los subespacios generalizados asociados a matrices verifican que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $E_{1,A}(\lambda) \subsetneq E_{2,A}(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_{t,A}(\lambda) = E_{t+1,A}(\lambda) = \ldots$. A $E_{t,A}(\lambda)$ se le llama **subespacio fundamental generalizado máximo**, y se denota por $E_A^*(\lambda)$. La dimensión del subespacio generalizado máximo coincide con la multiplicidad algebraica de λ.

3. Obtención de la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable.

Para obtener la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable seguimos el siguiente algoritmo:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico de A: $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \ldots (x - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}$

Paso 2: Para cada valor propio λ se calcula la cadena de subespacios fundamentales generalizados: $E_{1,A}(\lambda) \subsetneq E_{2,A}(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq E_{t,A}(\lambda) = E_A^*(\lambda)$.

Paso 3: Se escribe $E^*(\lambda) = E_{t-1,A}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$. Para ello, se localizan $l = \dim(E^*(\lambda)) - \dim(E_{t-1,A}(\lambda))$ vectores linealmente independientes de $E^*(\lambda) - E_{t-1,A}(\lambda)$, de forma que $F_t(\lambda) =< v_{1t} \ldots v_{lt} >$ verifique $E^*(\lambda) = E_{t-1,A}(\lambda) \oplus F_t(\lambda)$.

Paso 4: Para cada vector $v_{it} \in Mat_{n\times 1}(K)$ hallados en el paso anterior se calculan los vectores: $(A-\lambda I_n)^j v_{it}$, para $j=0,\dots,t-1$.

Paso 5: Si $< \{v_{1t}, (A-\lambda I_n)v_{it}, (A-\lambda I_n)^2 v_{it}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{it}, \dots, v_{lt}, (A-\lambda I_n)v_{lt}, (A-\lambda I_n)^2 v_{lt}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{lt}\} >$ coincide con $E^*(\lambda)$, el proceso para este valor propio ha finalizado. En caso contrario, se localiza el mayor número posible de vectores de $E_{t-1,A}(\lambda) - E_{t-2,A}(\lambda)$ que sean linealmente independientes con los que ya tenemos $\{v_{1t}, (A-\lambda I_n)v_{it}, (A-\lambda I_n)^2 v_{it}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{it}, \dots, v_{lt}, (A-\lambda I_n)v_{lt}, (A-\lambda I_n)^2 v_{lt}, \dots, (A-\lambda I_n)^{t-1} v_{lt}\}$ para descomponer $E_{t-1,A}(\lambda) = E_{t-2,A}(\lambda) \oplus S_{t-1}(\lambda)$ teniendo en cuenta que de $S_{t-1}(\lambda)$ conocemos ya los vectores $\{(A-\lambda I_n)v_{1t}, \dots, (A-\lambda I_n)v_{lt}\}$. El número de vectores nuevos que debemos localizar viene dado por $\dim(E_{t-1,A}(\lambda)) - \dim(E_{t-2,A}(\lambda)) - l$. Si no es posible encontrar aquí, se va bajando en los eslabones de la cadena hasta conseguir nuevos vectores.

Paso 6: Supongamos que hemos hallado un vector $v \in E_{j,A}(\lambda) - E_{j-1,A}(\lambda)$ tal que es linealmente independiente con el conjunto que tenemos. Entonces, calculamos $(A-\lambda I_n)^k v$ para $k=0,\dots,j-1$.

Paso 7: El proceso anterior continua hasta que obtengamos $m(\lambda)$ vectores, contando cada vector y sus imágenes sucesivas para cada valor propio λ.

Paso 8: Se calcula la matriz de paso P que lleva en sus columnas los vectores hallados junto con sus imágenes sucesivas (en orden inverso) que se han hallado para cada $E^*(\lambda)$. Entonces, PAP^{-1} nos da una matriz de Jordan que es semejante a la matriz A. También se puede determinar J sin necesidad de calcular P teniendo en cuenta que por cada vector con sus imágenes sucesivas debemos crear un bloque básico de Jordan para λ de tamano el cardinal del conjunto formado por el vector con sus imágenes sucesivas.

4. Relación entre las matrices triangularizables y endomorfismos triangularizables.

Como ya se ha indicado con anterioridad, si tenemos una matriz cuadrada $A \in Mat_{n\times n}(K)$ podemos interpretarla como la matriz asociada a cierto endomorfismo $f: V \to V$ respecto de una base $\mathfrak{B}$. Entonces, A es triangularizable si y sólo si f es triangularizable.

Además si λ es un valor propio de A, podemos interpretar los vectores que figuran en $E_{j,A}(\lambda)$ de la manera siguiente: si $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in E_{j,A}$, entonces $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de un vector v en la base $\mathfrak{B}$ que satisface $(f-\lambda 1_V)^j(v) = 0$. Esto es, los elementos de los subespacios $E_{j,A}(\lambda)$ son las coordenadas de los vectores de $E_j(\lambda)$ en la base $\mathfrak{B}$.

Recíprocamente, si tenemos calculado $E_j(\lambda)$ las coordenadas de sus vectores en la base $\mathfrak{B}$ nos permiten construir $E_{j,A}(\lambda)$.

En consecuencia, ambos subespacios $E_{j,A}(\lambda)$ y $E_j(\lambda)$ están claramente relacionados.

Por otro lado, por el algoritmo de construcción y la relación mencionada entre $E_{j,A}(\lambda)$ y $E_j(\lambda)$, la forma canónica de Jordan de A y f coinciden. Por ello, si estamos interesados en calcular la forma canónica de Jordan de una matriz A podemos construir en primer lugar el endomorfismo asociado que tiene a A como matriz asociada y aplicar el algoritmo de construcción de la forma canónica de Jordan de f y ésta será precisamente la forma canónica de A. Además para construir una matriz de paso P entre A y J bastará con calcular la matriz de cambio de base entre la base de partida $\mathfrak{B}$ y la base hallada respecto de la cual la matriz asociada a f es J.

De forma análoga, si tenemos la forma canónica de Jordan J de una matriz A, esta matriz de Jordan J será también la matriz de Jordan de un endomorfismo f que tenga a A como matriz asociada en una base $\mathfrak{B}$ y la matriz de paso llevará en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base respecto de la cual la matriz asociada a f es J respecto de la base $\mathfrak{B}$.

5. Teorema de Cayley-Hamilton.

Para finalizar este tema, se demuestra en este apartado el Teorema de Cayley-Hamilton cuya versión matricial dice que toda matriz $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisface su polinomio característico. La demostración del mismo está dividida en diferentes lemas:

Lema 5.1. *Sea $J_m(0)$ el bloque básico de Jordan para el valor propio 0 de orden m. Entonces, $\chi_{J_m(0)}(J_m(0)) = 0$.*

Lema 5.2. *Sea $J_m(\lambda)$ el bloque básico de Jordan para el valor propio λ de orden m. Entonces, $\chi_{J_m(\lambda)}(J_m(\lambda)) = 0$.*

Lema 5.3. *Sea J una matriz de Jordan. Entonces, $\chi_j(J) = 0$.*

Con estos lemas es fácil probar:

Teorema 5.4. *(***Teorema de Cayley-Hamilton***) Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Entonces, $\chi_A(A) = 0$.*