4. Raíces de un polinomio.

Otro concepto fundamental relacionado con los polinomio es el de **raíz de un polinomio**. Si $p(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$, entonces se dice que α es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad m si $(x-\alpha)^m$ divide a $p(x)$ y $(x-\alpha)^{m+1}$ no divide a $p(x)$.

Lo anterior equivale a decir que $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, siendo $q(\alpha) \neq 0_K$.

Como consecuencia inmediata del Algoritmo de la división, se tiene

Proposición 4.1. *Sea $p(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$ una raíz de $p(x)$. Entonces, α es raíz de multiplicidad mayor que 1 si y sólo si α es raíz de p y de p', donde $p'(x)$ es el polinomio derivada de $p(x)$.*

Por otro lado, es fácil probar que

Proposición 4.2. *Sea $p(x) \in K[x]$ un polinomio de grado n. Entonces, $p(x)$ tiene a lo más n raíces en K.*

En el caso particular de $K = \mathbb{Q}$, se existe una forma sencilla de localizar las raíces de un polinomio con coeficientes enteros:

Proposición 4.3. *Sea $p(x) = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio de grado m. Entonces, las raíces racionales de $p(x)$ son de la forma a/b, con a, b primos entre sí, a divisor de a_0 y b divisor de a_m.*

A partir del estudio de las raíces racionales de un polinomio con coeficienters enteros se puede calcular las raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales. En efecto, si $p(x) = \sum a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$, entonces los coeficientes de este polinomio son de la forma $a_i = \frac{b_i}{c_i}$, siendo $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Entonces, el polinomio $q(x) = \sum e_i x^i$, donde $e_i = \frac{a_i c}{c_i}$, siendo c el mínimo común múltiplo de los c_i. Entonces, $q(x) \in Z[x]$ tiene las mismas raíces que $p(x)$ y las raíces de $q(x)$ se pueden calcular por el método descrito en el resultado anterior.