3. Divisibilidad. Algoritmo de la división.

El **Algoritmo de división en** $K[x]$ nos da la manera de dividir dos polinomios esto es, que si $p(x), q(x) \in K[x]$, siendo $q(x) \neq 0$, el Algoritmo de la división permite localizar unos únicos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x)c(x)+r(x)$, siendo $\deg(r) < \deg(q)$. A $r(x)$ se le llama **resto de la división de** $p(x)$ **entre** $q(x)$ y a $c(x)$ **cociente de la división de** $p(x)$ **entre** $q(x)$. La demostración del Algoritmo de la división consta de dos partes. En la primera se prueba la existencia de los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ y en la segunda parte se prueba su unicidad. Para construir $c(x)$ y $r(x)$ se siguen los siguientes pasos:

1. Si $\deg(p) < \deg(q)$, se elige $c(x) = 0$ y $r(x) = p(x)$.

2. Si $n = \deg(p) \geq \deg(q) = m$ se elige $c_1(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m}$, donde a_n es el coeficiente director de $p(x)$ y b_m^{-1} es el coeficiente director de $q(x)$ y se toma $p_1(x) = p(x) - c_1(x)q(x)$.

3. Si $\deg(p_1) < \deg(q)$, entonces se toma $r(x) = p_1(x)$ y $c(x) = a_n^{-1} x^{n-m}$.

4. Si $\deg(p_1) \geq \deg(q)$, se reitera el paso 2 pero tomando como $p(x)$ a $p_1(x)$ y se construye un nuevo polinomio $p_2(x) = p_1(x) - c_2(x)q(x)$. Si $\deg(p_2) < \deg(q)$ se elige $c(x) = c_1(x) + c_2(x)$ y $r(x) = p_2(x)$ y si $\deg(p_2) \geq \deg(q)$ se repite el proceso con $p_2(x)$ y así sucesivamente.

Observamos que como los polinomios $p_i(x)$ que se van construyendo verifican $\deg(p) > \deg(p_1) > \deg(p_2) > \ldots$ llegará un momento en el que el polinomio obtenido $p_i(x)$ sea de grado menor que $q(x)$.

Para finalizar este apartado introducimos el concepto de *dividir a* :

Definición. Sean $p(x), q(x) \in K[x]$, siendo $q(x) \neq 0$. Se dice que $q(x)$ **divide a** $p(x)$ si $r(x) = 0$, siendo $r(x)$ el resto de la división de $p(x)$ entre $q(x)$.

Si $r(x) \neq 0$, entonces se dice que $q(x)$ no divide a $p(x)$.

Si $q(x)$ divide a $p(x)$ se escribirá: $q(x)|p(x)$ y en caso contrario $q(x) \not| p(x)$.