1. Construcción del anillo de polinomios $K[x]$.

Dado un cuerpo K, se define

$$K[x] = \{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \mid a_i \in K, i = 0, \ldots, m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

donde $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, siendo $a_i \in K, i = 0, \ldots, m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ recibe el nombre de **polinomio en x con coeficientes en K.**

Dos polinomios $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ son iguales si $a_i = b_i$, para todo i.

Por convenio, si $a_i = 0$, entonces $a_i x^i = 0$ y $x^0 = 1$. Esto nos permite denotar al polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = a_m x^m + \ldots + a_0$ por $p(x) = \sum a_i x^i$, entendiendo que $a_i = 0$ si $i > m$.

En $K[x]$ se pueden definir dos operaciones internas: la suma y el producto de polinomios. En concreto,

Definición. Sean $p(x) = \sum a_i x^i$ y $q(x) = \sum b_i x^i$ dos polinomios de $K[x]$. Se llama **suma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$**, y se denota por $p(x) + q(x)$, al polinomio

$$p(x) + q(x) = \sum (a_i + b_i) x^i.$$

Es fácil ver que $(K[x], +)$ tiene estructura de grupo abeliano siendo 0 el elemento neutro del mismo y dado $p(x) = \sum a_i x^i$, su elemento opuesto es $-p(x) = \sum (-a_i) x^i$.

Definición. Sean $p(x) = \sum a_i x^i$ y $q(x) = \sum b_i x^i$ dos polinomios de $K[x]$. Se llama **producto de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$**, y se denota por $p(x) \cdot q(x)$ al polinomio

$$p(x) \cdot q(x) = \sum c_i x^i,$$

donde $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$, para todo i.

Se puede demostrar que $(K[x], \cdot)$ es un semigrupo conmutativo con elemento identidad, siendo éste 1. Además, $(K[x], +, \cdot)$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento identidad, que recibe el nombre de **anillo de los polinomios con coeficientes en K en la indeterminada x.**