

Descripción de la Curso.

El Álgebra Lineal es la parte de las Matemáticas que estudia los espacios vectoriales y las aplicaciones entre ellos.

En el presente curso es la continuación natural de la asignatura [“Introducción al Álgebra Lineal”](#), de los mismos autores, que fue publicado en el Proyecto OCW de la UPV/EHU durante el curso 2009. Se compone de material autocontenido que complementa el ofrecido en el curso asignatura [“Introducción al Álgebra Lineal”](#) de forma que se cubre entre ambos la mayor parte del temario que figura en una asignatura anual clásica de Álgebra Lineal de los primeros cursos de estudios científico-técnicos. En concreto, se centra en los siguientes temas:

Tema 1: Nociones básicas del Álgebra Lineal: En este tema se repasarán de forma rápida los conceptos básicos del Álgebra Lineal que surgirán en los temas posteriores. No se pretende realizar un estudio exhaustivo de los mismos, puesto que esto ya se hizo en la asignatura "Introducción al Álgebra Lineal". Se trata, por tanto, de fijar notación y tener claro con que se está trabajando en los temas posteriores.

Tema 2: Forma canónica de Jordan de un endomorfismo: Se trabajará el concepto de endomorfismo de un espacio vectorial y se dará un método para obtener la forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable.

Tema 3: Forma canónica de Jordan de una matriz: Se caracterizarán las matrices cuadradas triangularizables y se dará un método que permita obtener tanto su matriz de Jordan como una matriz de paso. Asimismo, se establecerá la relación entre las formas canónicas de Jordan de una matriz y de un endomorfismo.

Tema 4: Formas bilineales: Se estudiará en profundidad el concepto de forma bilineal y los tipos de formas bilineales que existen. Asimismo, se introducirá la noción de ortogonalidad y de signatura de una forma bilineal simétrica.

Tema 5: Espacios euclídeos: Se trabajará con un tipo especial de formas bilineales: los productos escalares. También se estudiarán las bases ortonormales en espacios euclídeos y se dará un método que permita su construcción. Asimismo, se analizarán en profundidad dos tipos de aplicaciones lineales en espacios euclídeos: las isometrías y los endomorfismos autoadjuntos. En particular, se caracterizarán las isometrías y se verá el Teorema espectral de los endomorfismos autoadjuntos, que permite conectarlo con lo estudiado en la primera parte de la asignatura (Temas 2 y 3).

Anexo: Anillos de Polinomios: Se repasan las nociones básicas sobre Anillos de Polinomios que facilitan el estudio de los polinomios característicos que aparecen cuando se calcula la forma canónica de Jordan de un endomorfismo o matriz triangularizable.

Para cada tema se incluye un resumen teórico que recoge las definiciones, propiedades y resultados más relevantes expuestos de forma clara y rigurosa desde el punto de vista matemático de los conceptos presentados y se ofrece una colección de ejercicios propuestos y resueltos que ayudan al estudio de la materia trabajando las técnicas más usuales en el Álgebra Lineal. Además, se completa el material presentado con una colección de cuestiones teóricas y exámenes propuestos de sobre la materia descrita.

Competencias.

Profundizar en el concepto de endomorfismo de un espacio vectorial.

Caracterizar los endomorfismos diagonalizables y para éstos saber calcular su forma canónica de Jordan.

Caracterizar los endomorfismos triangularizables y para éstos saber calcular su forma canónica de Jordan.

Trabajar el concepto de matriz semajante.

Saber determinar si dos matrices triangularizables son semejantes o no.

Saber calcular la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable.

Comprender el concepto de forma bilineal y trabajar con diferentes tipos de formas bilineales.

Estudiar los conceptos básicos en los espacios euclídeos.

Ortogonalizar un sistema de vectores en un espacio euclídeo.

Objetivos.

El objetivo principal del curso es profundizar en el estudio del Álgebra Lineal, trabajando en conceptos como el de forma canónica de Jordan o búsqueda de bases ortonormales en un espacio euclídeo.

Prerrequisitos.

El material expuesto es autocontenido y en él se pueden encontrar todas los conceptos necesarios para la comprensión de la asignatura. No obstante, se supone que el estudiante está familiarizado con los conceptos básicos del Álgebra Lineal como espacios vectoriales, bases, aplicaciones lineales,... que se repasan en el primero de los

Temas propuestos con el fin de fijar notación. Asimismo, se presupone que el estudiante tiene la destreza mínima necesaria para realizar los cálculos que sean necesarios.

Programa del curso.

Tema 1: NOCIONES BÁSICAS DEL ALGEBRA LINEAL.

Conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales y bases. Aplicación lineal y su matriz asociada. Valores y vectores propios de un endomorfismo y de una matriz. Polinomio característico.

Tema 2: FORMA CANÓNICA DE JORDAN DE UN ENDOMORFISMO.

Planteamiento del problema. Endomorfismos triangularizables. Subespacios fundamentales generalizados asociados a un valor propio de un endomorfismo. Bloques básicos de Jordan. Obtención de la forma canónica de Jordan de un endomorfismo triangularizable.

Tema 3: FORMA CANÓNICA DE JORDAN DE UNA MATRIZ.

Planteamiento del problema. Matrices semejantes. Matrices triangularizables. Subespacios fundamentales generalizados asociados a un valor propio de una matriz. Obtención de la forma canónica de Jordan de una matriz triangularizable. Relación entre las formas canónicas de una matriz y de un endomorfismo. Teorema de Cayley-Hamilton.

Tema 4: FORMAS BILINEALES.

Concepto de forma bilineal. Matriz asociada a una forma bilineal. Formas bilineales simétricas. Ortogonalidad. Formas no degeneradas. Bases ortogonales. Ley de Inercia. Signatura de una forma bilineal simétrica. Formas definidas positivas y negativas. Formas cuadráticas.

Tema 5: ESPACIOS EUCLÍDEOS.

Producto escalar. Espacios euclídeos. Bases ortonormales. Matrices ortogonales. Isometrías. Endomorfismos autoadjuntos. Teorema espectral.

Anexo: EL ANILLO DE POLINOMIOS $K[x]$.

Construcción del anillo de polinomios $K[x]$. Grado de un polinomio. Divisibilidad. Algoritmo de la división. Raíces de un polinomio. Polinomios irreducibles. Factorización de un polinomio.

Metodología.

La metodología recomendada para conseguir el máximo aprovechamiento del material del curso que se propone seguir en cada tema es la siguiente:

- Estudiar en profundidad el material teórico presentado para ese tema, complementando el mismo con las demostraciones que se encuentran en las referencias de la Bibliografía.
- Estudiar los ejercicios prácticos resueltos en los que se aplican las técnicas esenciales que permiten trabajar los conceptos presentados en el tema.
- Resolver los ejercicios propuestos para el tema.
- Ejecutar los ejercicios de autoevaluación para verificar la comprensión de los conceptos trabajados.

Se recomienda empezar por el Tema 1 para recordar los conceptos que se van a utilizar en los temas posteriores. Es aconsejable seguir el orden marcado para los restantes

temas, aunque se pueden estudiarlos en dos bloques separados: por un lado los Temas 2 y 3 y por otro los Temas 4 y 5. Si el conocimiento sobre polinomios es escaso, es conveniente estudiar el Anexo antes de abordar el estudio de los Temas 2 y 3.

Cronograma.

El tiempo recomendable para el estudio de los contenidos de la asignatura es de 15 semanas (un cuatrimestre) a razón de un mínimo de 4 horas/semana. Presuponiendo un mínimo de conocimiento de los conceptos básicos del Álgebra Lineal, una distribución óptima del tiempo mínimo para la correcta comprensión de la asignatura es la siguiente:

Estudio del Tema 1: 5 horas de las cuales 1'5 se dedican al desarrollo teórico y 3'5 al práctico.

Estudio de los Temas 2, 4 y 5: 15 horas/tema de las cuales 6 se dedican al desarrollo teórico y 9 al práctico.

Estudio del Tema 3: 10 horas de las cuales 4 se dedican al desarrollo teórico y 6 al práctico.