Aljebra Trukakorra. 7. gaia. Galdetegiaren soluzioak

Gustavo Fernández, Luis Martínez
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

1. **Batzuetan.** Egia da A ideal nagusietako domeinua denean, baina ez eraztun orokorretarako. Adibidez, $M = A = K[X,Y]$ hartzen badugu, orduan M A-modulu askea da, baina $N = \langle X, Y \rangle$ azpimodulua ez da askea.

2. **Egia.** Oro har, A ideal nagusietako domeinua bada, orduan A-modulu finituki sortu eta bihurduragabe guztiak askeak dira.

3. **Inoiz ez.** Ohartu M $K[X]$-modulu finituki sortua dela. Egitura-teorema erabiliz, M $K[X]/(f(X))$ moduko zatidura eraztunen batura zuzen gisa deskonposatzen da. Orain, $\dim_K M < \infty$ denez, $(f(X)) \neq \{0\}$ dugu eta $K[X]/(f(X))$-ko elementu guztiak bihurdura-elementuak dira. Beraz, beste horrenbeste gertatzen zaio M-ri.

4. **Beti.** Nabaria da: $ax = 0$ denean, $a \in A$ eta $x \in M$ izanik, $a = 0$ edo $x = 0$ betetzen bada, orduan bereziki beteko da $x \in N$ denean.

5. **Gezurra.** Esan dezakegun guztia da $(a_i) = (b_i)$ idealen arteko berdintza betetzen dela $i = 1, \ldots, m$ guztietarako.

6. **Gezurra.** Adibidez, $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}^2$ eta $N = \langle (2,0) \rangle$ bada, orduan $\{(2,0)\}$ multzoa N-ren oinarria da, baina ezin da luzatu M-ren oinarri bateraino.

7. **Egia.** Izan ere, faktore aldagaitz horiek $a_1, \ldots, a_m$ badira, orduan bi moduluak dira $A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_m)$ A-moduluaren isomorfoak.

8. **Egia.** Gogoratu dagozkien $\mathbb{C}[X]$-moduluen egitura lortzeko matrize elkartu baten (edozeinen) Smithen forma normala kalkulatu behar dela.

9. **Egia.** Faktore aldagaitzak $\mathbb{Z}$-n daude eta haien biderkadura 1 da; beraz, 1 edo -1 izan behar dute.

10. $\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}$. Kalkulatu $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ matrizearen Smithen forma normala.