Aljebra Trukakorra. 4. gaia. Galdetegiaren soluzioak

Gustavo Fernández, Luis Martínez
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

1. **Gezurra.** Har dezagun, adibidez, $A = \mathbb{Z}$ (beraz, $K = \mathbb{Q}$ dugu) eta $f(X) = 2X + 2$. Orduan, f irreduziblea da $\mathbb{Q}[X]$-n, baina $\mathbb{Z}[X]$-n $2(X + 1)$ faktorizazio ez-tribiala du. Polinomioa jatorrizkoa denean, berriz, emaitza egia da.

2. **Egia.** Gaussen Lemaren ondorio ezaguna da.

3. **Egia.** Egia esan, f $A[X]$-ko irreduzibleetan faktorizatzen badugu, hori bera $K[X]$-ko irreduzibleetako faktorizazioa da.

4. **Gezurra.** Adibidez, $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ ez da irreduziblea $\mathbb{Z}[X]$-n. Kontuan izan Eisensteinen irreduzibilitate-irizpidea aplikatu ahal izateko p^2-k ez duela a_0 zatitu behar.

5. **Gezurra.** Jatorrizko polinomioa denez, nahikoa da irreduzibilitatea $\mathbb{Q}[X]$-n aztertzea. Hirugarren mailakoa denez, $\mathbb{Q}$-n errorik duen edo ez ikusi behar dugu. Balizko erro arrazional batean, zenbakitzaileak 1 zatitu behar du eta izendatzaileak, berriz, 2 zatitu behar du. Orain, erraz egiaztatzen da $1/2$ erroa dela.

6. **Egia.** Egin $X = Y + 1$ aldaketa eta aztertu lortzen den Y-rekiko polinomioa Eisensteinen irizpidea aplikatuz, $p = 5$ zenbaki lehenarekin.

7. **Egia.** Laburtu emandako polinomioa 2 moduluarekiko, eta ikusi emaitza irreduziblea dela $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$-n. Horretarako, ikusi polinomio laburtu horrek ez duela errorik $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-n, eta ezin dela jarri bigarren mailako bi polinomio irreduzibleren biderkadura gisa. (Kontuan izan $X^2 + X + \overline{1}$ dela $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$-ko bigarren mailako polinomio irreduzible bakarra.)

8. **Gezurra.** Adibidez, $2X + 2 = 2(X + 1)$ lehenengo mailakoa da $\mathbb{Z}[X]$-n, baina ez da irreduziblea.

9. **Egia.** Erraz frogatzen da $K[X, Y, Z]/\mathfrak{a} \cong K[Y, Z]/(Z + Z^2Y^4 + Y^5)$ isomorfismoa. Azken eraztun hori integritate-domeinua da $Z + Z^2Y^4 + Y^5$ polinomioa irreduziblea baita $K[Y, Z]$-n (ikusi $K[Y, Z]$ eraztuna $K[Z][Y]$ moduan, eta aplikatu Eisensteinen irizpidea $p = Z$ hartuta). Ondorioz, $\mathfrak{a}$ $K[X, Y, Z]$-ren ideal lehena da.

10. **Egia.** Izan bedi $f \in A[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$. Orduan, f-ren adierazpenean indeterminatu kopuru finitu bat besterik ez da agertzen. Hortaz, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ halakoa non $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ baita. Orain, erraz ikus daiteke f irreduziblea dela $A[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$ eraztunean baldin eta soilik baldin irreduziblea bada $A[X_1, \dots, X_n]$-n, eta f-ren irreduzibleetako faktorizazioak $A[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$ eta $A[X_1, \dots, X_n]$ eraztunetan bat datozela. Propietate horiek kontuan harturik, $A[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$ faktorizazio bakarreko domeinua dela ondorioztatzen da.