Aljebra Trukakorra. 3. gaia. Galdetegiaren soluzioak

Gustavo Fernández, Luis Martínez
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

1. **Batzuetan.** Adibidez, A faktorizazio bakarreko domeinua bada, orduan egia da, baina $A = K[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ zatidura eraztunean, $\overline{X}$ elementua irreduziblea da eta ez da lehena.

2. **Beti.** $\mathbb{Z}$-n infinitu zenbaki lehen daudela frogatzeko erabiltzen den Euklidesen argudio berak kasu horretarako ere balio du.

3. **Gezurra.** Adibidez, K gorputza bada, orduan $K[X]$ faktorizazio bakarreko domeinua da. Hala ere, $K[X^2, X^3]$ azpieraztuna ez da faktorizazio bakarreko domeinua.

4. **Gezurra.** Adibidez, K gorputza bada, orduan $K[X,Y]$ faktorizazio bakarreko domeinua da eta $(X^2 - Y^3)$ haren ideal lehena da. Hala ere, $K[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ zatidura eraztuna ez da faktorizazio bakarreko domeinua.

5. **Beti.** Izan ere, $a = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ eta $b = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ idazten badugu, $p_i \in A$ elementuak irreduzibleak izanik, eta $m_i, n_i \geq 0$ zenbaki osoak izanik, ezaguna da

   $$\mathrm{zkh}(a,b) \sim p_1^{\min\{m_1,n_1\}} \dots p_r^{\min\{m_r,n_r\}} \qquad \text{eta} \qquad \mathrm{mkt}(a,b) \sim p_1^{\max\{m_1,n_1\}} \dots p_r^{\max\{m_r,n_r\}}$$

   dela. Hortik berehala ondorioztatzen da $\mathrm{zkh}(a,b) \cdot \mathrm{mkt}(a,b) \sim ab$ dela.

6. **Egia.** Baldin eta $\mathfrak{a} = (a)$ eta $\mathfrak{b} = (b)$ bada, orduan $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (\mathrm{mkt}(a,b))$ dugu.

7. **Gezurra.** Adibidez, K gorputza bada, orduan $K[X,Y]$ faktorizazio bakarreko domeinua da. Hala ere, $(X) + (Y) = (X,Y)$ ez da ideal nagusia.

8. **Gezurra** Adibidez, $(2, X)$ ideala ez da nagusia.

9. **Egia.** Gogoratu $S^{-1}A$-ren ideal guztiak $S^{-1}\mathfrak{a}$ motakoak direla, $\mathfrak{a}$ A-ren ideala izanik. Orain, A ideal nagusietako domeinua denez, $\mathfrak{a} = (a)$ idatz dezakegu, eta orduan $S^{-1}\mathfrak{a} = (a)$ ere nagusia da.

10. **Gezurra.** Adibidez, $\mathbb{Z}$ domeinu euklidearra da, baina $\mathbb{Z}[X]$ ez da domeinu euklidearra, ez baita ideal nagusietako domeinua.