Aljebra Trukakorra. 2. gaia. Galdetegiaren soluzioak

Gustavo Fernández, Luis Martínez
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

1. **Gezurra.** Adibidez, $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z}$ eta $\mathfrak{b} = 3\mathbb{Z}$ idealak hartzen baditugu $\mathbb{Z}$-n, orduan $2, 3 \in \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ dugu, baina $2 + 3 \notin \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$.
2. **Batzuetan.** Adibidez, ideal nulua ez da $\mathbb{Z}$-n maximala, baina bai ordea $\mathbb{C}$-n.
3. **Batzuetan.** Adibidez, $\mathbb{Z}$-n ideal nulua lehena da, baina ez maximala; bestalde, $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$-k bi ideal lehen ditu, $2\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ eta $7\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ alegia, eta biak maximalak dira.
4. **Gezurra.** Ohartu $6^2 \in (12)$ dugula, baina $6 \notin (12)$.
5. **Gezurra.** Adibidez, $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ zatidurak hiru ideal besterik ez du, $\{\overline{0}\}$, $(X)/(X^2)$ eta $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ alegia.
6. **Gezurra.** Adibidez, $\mathbb{Z}$ integritate-domeinua da, baina $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ez da.
7. **Egia.** Izan bedi $A = K[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$ polinomioen eraztuna. Orduan, $B = K[X_i \mid i \geq 2]$ A-ren azpieraztun propioa da, eta $X_i \mapsto X_{i+1}$ erregelak eraztun-isomorfismo bat definitzen du A-ren eta B-ren artean (polinomioen eraztunen propietate unibertsala erabiliz).
8. **Beti.** Izan ere, $\overline{f} : A/f^{-1}(\mathfrak{p}) \longrightarrow B/\mathfrak{p}$, non $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ baita, eraztun-monomorfismoa da. Ondorioz, $A/f^{-1}(\mathfrak{p})$ integritate-domeinu baten azpieraztuna da eta, beraz, hori ere integritate-domeinua da.
9. **Batzuetan.** Adibidez, $i : A \longrightarrow A$ identitate aplikazioa bada eta $\mathfrak{m}$ A-ren ideal maximala bada, orduan $i^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ A-ren ideal maximala da; bestalde, $j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ partekotasun homomorfismoa bada, orduan $\{0\}$ $\mathbb{Q}$-ren ideal maximala da, baina $j^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ez da $\mathbb{Z}$-ren ideal maximala.
10. **Beti.** Hartzen badugu $x \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$, orduan $x/1$ ez da 0 eta ez da unitatea.