Aljebra Trukakorra. 1. gaia. Galdetegiaren soluzioak

Gustavo Fernández, Luis Martínez
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

1. **Gezurra.** Adibidez, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ eraztunean $\overline{2}$ eta $\overline{5}$ zeroren zatitzaileak dira, baina $\overline{2}+\overline{5}=\overline{7}$ ez da zeroren zatitzailea.
2. **Gezurra.** Adibidez, $\overline{5}\cdot\overline{6}=\overline{0}$ dugu $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$-n, baina $\overline{5}\neq\overline{0}$ eta $\overline{6}\neq\overline{0}$.
3. **Inoiz ez.** Demagun A eraztunean a zeroren zatitzailea eta unitatea dela. Orduan existitzen da $b\in A$, $b\neq 0$, non $ab=0$ baita. Berdintza horretan a-ren alderantzizkoaz biderkatuz, $b=a^{-1}ab=0$ lortzen dugu, eta hori kontraesana da.
4. **Egia.** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eraztuna n karakteristikakoa da.
5. **Gezurra.** Integritate-domeinu baten karakteristika 0 edo zenbaki lehen bat besterik ezin da izan.
6. **Bost.** Hauek dira: $\overline{0}$, $\overline{5}$, $\overline{10}$, $\overline{15}$ eta $\overline{20}$, hau da, $5\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$-ko elementuak.
7. **Gezurra.** Adibidez, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ eraztunean $\overline{2}X+\overline{1}$ unitatea da (bere buruaren alderantzizkoa da).
8. **Egia.** Izan ere, A integritate-domeinua bada, orduan $A[X]$-ko polinomioen biderkaduraren maila mailen batura da.
9. **Batzuetan.** Adibidez, $K[X]$ polinomioen aljebra finituki sortua da (X indeterminatuak sortzen du), baina dimentsio infinitukoa da K-ren gaineko bektore-espazio gisa. Beste alde batetik, $K\times K$ biderkadura cartesiarra ere K-aljebra finituki sortua da (adibidez, $(1,0)$ eta $(0,1)$ tuplek sortzen dute) eta horren K-dimentsioa 2 da, finitua.
10. **Gezurra.** Adibidez, $K[X]$ elementu batek sortzen du, baina haren azpialjebra den $K[X^2,X^3]$ ezin da elementu bakar baten bidez sortu.