Ariketak

7.1. Izan bitez A ideal nagusietako domeinua, M A-modulu finituki sortua, eta N M-ren azpimodulua. Frogatu N ere finituki sortua dela. (Iradokizuna: Badakigu M A^n-ren zatidura batekin isomorfoa dela. Erabili korrespondentziaren teorema.)

7.2. Izan bitez A ideal nagusietako domeinua eta M A-modulu finituki sortua. Frogatu bi baldintza hauek baliokideak direla:

(i) M modulu askea da.
(ii) M modulu bihurduragabea da.

Ohartu M finituki sortua izateko baldintza ezinbestekoa dela: 6.2. problemaren arabera, $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modulu bihurduragabea da, baina ez askea.

7.3. Izan bitez A ideal nagusietako domeinua, M A-modulua eta N M-ren azpimodulua. Baldin eta M/N zatidura finituki sortua eta bihurduragabea bada, frogatu N-k osagarri bat duela M-ren barruan. (Iradokizuna: Konbinatu 6.8 eta 7.2 ariketak.)

Oharra. Izan bitez A ideal nagusietako domeinua, M A-modulu finituki sortua eta N M-ren azpimodulua. Aurreko ariketaren arabera, M/N bihurduragabea bada, orduan N-k osagarri bat du M-ren barruan. Nola jakin dezakegu M/N bihurduragabea den? Erantzuna erraza da N-ri dagokion Smithen forma normala erabiltzen badugu: faktore aldagaitz guztiek 1 (edo, zehazkiago, A-ren unitate bat) izan behar dute. Ohar hau hurrengo ariketan erabiliko dugu.

7.4. Erabaki $\mathbb{Z}^3$-ren azpimodulu hauek osagarria duten edo ez:

(i) $N = \langle (2,1,2), (1,2,1) \rangle$.
(ii) $N = \langle (2,1,2), (1,2,-1) \rangle$.

7.5. Izan bitez A ideal nagusietako domeinua eta M A-modulu finituki sortua. Baldin eta M-ren faktore aldagaitzak $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_m$ badira, frogatu $\operatorname{Ann} M = (d_m)$ dela.

7.6. Izan bitez V bektore-espazioa K gorputzaren gainean, eta $\varphi : V \longrightarrow V$ aplikazio lineala. Dakigunez, V $K[X]$-modulua da, $f(X)v = f(\varphi)(v)$ definituz $f(X) \in K[X]$ eta $v \in V$ guztietarako.

(i) Frogatu badagoela $\mu_\varphi(x) \in K[X]$ polinomio moniko bakar bat, propietate hau betetzen duena:

$$f(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_\varphi(X) \mid f(X).$$

Polinomio horri φ-ren *polinomio minimoa* deitzen zaio. (Iradokizuna: Izan bedi $\operatorname{Ann} V$ V-ren anulatzailea $K[X]$-modulu gisa. Orduan, $f(\varphi) = 0$ eta $f(X) \in \operatorname{Ann} V$ gauza bera dira.)

(ii) Demagun $d_1(X) \mid \cdots \mid d_r(X)$ φ-ren faktore aldagaitzak direla. Frogatu $\mu_\varphi(X) = d_r(X)$ dela eta ondorioztatu $\mu_\varphi(X)$ polinomio minimoak $\chi_\varphi(X)$ polinomio karakteristikoa zatitzen duela. Bereziki, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ dugu (*Cayley-Hamiltonen teorema*).

(iii) Baldin eta φ endomorfismoa diagonalgarria bada, zein da φ-ren polinomio minimoa? Ondorioztatu polinomio minimoa eta polinomio karakteristikoa ez datozela bat oro har.

7.7. Adierazi ondorengo ataletako talde abeldarrak talde ziklikoen biderkadura zuzen gisa:

(i) $G = \langle a, b \rangle$ non $a^2b^4 = a^{-2}b^6 = 1$.
(ii) $G = \langle a, b, c \rangle$ non $a^{-1}b^2 = a^{10}b^2c^{12} = a^{11}b^2c^{12} = 1$.
(iii) $G = \langle a, b, c \rangle$ non $a^2b^4c^4 = a^{-6}b^6c^{12} = a^{10}b^{-4}c^{-16} = 1$.
(iv) $G = \langle a, b, c \rangle$ non $a^7b^{-7} = a^{14}b^{-6}c^8 = a^7bc^8 = 1$.
(v) $G = \langle a, b, c \rangle$ non $a^6b^3c^3 = a^6b^6c^6 = a^{30}b^3c^{27} = 1$.

7.8. Eman endomorfismo hauen forma kanoniko arrazionalak:

(i) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, non $\varphi(x, y, z) = (x + y + 3z, 5x + 2y + 6z, -2x - y - 3z)$.
(ii) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, non $\varphi(x, y, z, t) = (2x - y - z - t, -x + 2y - z - t, -x - y + 2z - t, -x - y - z + 2t)$.

7.9. Eman matrize hauen forma kanoniko arrazionalak $\mathbb{Q}$ gorputzaren gainean:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.10. Badakigu $C \in M_5(\mathbb{Q})$ matrizearen faktore aldagaitzak $f(X)$, $X + 1$ eta $(X + 1)^2(X - 1)$ direla. Zein da $f(X)$ polinomioa? Zein da C-ren forma kanonika arrazionala?