Ariketak

6.1. Izan bedi M A-modulua. Frogatu

$$T(M) = \{x \in M \mid x \text{ bihurdura-elementua}\}$$

multzoa M-ren azpimodulua dela. Horri M-ren *bihurdura-azpimodulua* deitzen zaio. Ikusten badugu $\mathbb{C}^\times$ taldea $\mathbb{Z}$-modulu gisa, zein da $T(\mathbb{C}^\times)$?

6.2. Ariketa honetan $\mathbb{Q}$-ren propietateak aztertzen ditugu, $\mathbb{Z}$-modulu gisa ikusita.

(i) Frogatu $\mathbb{Q}$ ez dela finituki sortua.
(ii) Frogatu $\mathbb{Q}$ bihurduragabea dela.
(iii) Frogatu $\mathbb{Q}$ ez dela modulu askea.

6.3. Frogatu $\mathbb{Z}[1/2]$ eraztunak aurreko ariketan ikusi ditugun $\mathbb{Q}$-ren propietate berberak betetzen dituela, $\mathbb{Z}$-modulu gisa ikusten badugu. Zer gertatzen da $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-rekin?

6.4. Problema honetan finituki sortua izateko propietatearen portaera aztertzen dugu, azpimoduluetara eta zatidura moduluetara pasatzerakoan.

(i) Izan bitez K gorputza eta $A = K[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$, polinomioen eraztuna indeterminatu kopuru kontagarri baten gainean. Aurkitu infinitu sortzaile behar dituen A-ren ideal bat, eta ondorioztatu modulu finituki sortu baten azpimodulu batek ez duela zertan finituki sortua izan.
(ii) Baldin eta M finituki sortua bada eta N M-ren azpimodulua bada, ikusi M/N ere finituki sortua dela.
(iii) Baldin eta N eta M/N finituki sortuak badira, frogatu M ere finituki sortua dela.

6.5. Izan bedi A eraztuna.

(i) Ikusi $A[X]$ A-modulu askea dela, eta heina kontagarria duela. Orokortu $A[X_1, \ldots, X_n]$-ren kasura.
(ii) Frogatu $A[X_1, \ldots, X_n] \cong A[X]$ A-moduluen isomorfismoa.

6.6. Izan bedi A eraztuna.

(i) Frogatu $A[X^2]$ $A[X]$-ren A-azpimodulua dela. Eman $A[X]/A[X^2]$-ren elementuak errepikapenik gabe, eta ondorioztatu zatidura hori A-modulu askea dela, oinarri bat emanez.
(ii) Aurreko atala erabiliz, ikusi $A[X]/A[X^2] \cong A[X]$ isomorfismoa betetzen dela.

6.7. Izan bedi A integritate-domeinua.

(i) Izan bedi $C \in M_n(A)$, hau da, $n \times n$ tamainako matrizea A-ren gainean. Frogatu C alderanzgarria dela baldin eta soilik baldin $\det C \in A^\times$ bada.

(ii) Izan bedi $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ A^n-ren oinarria. Baldin eta $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$ A^n-ren azpimultzoa bada, idatz dezagun

$$y_j = c_{1j}x_1 + \cdots + c_{nj}x_j, \quad j = 1, \dots, n \text{ guztietarako,}$$

eta defini dezagun $C = (c_{ij}) \in M_n(A)$. Frogatu $\mathcal{B}'$ A^n-ren oinarria dela baldin eta soilik baldin $\det C \in A^\times$ bada.

(iii) Ondorioztatu $\{(2, 0, \dots, 0)\}$ multzoa ezin dela luzatu $\mathbb{Z}^n$-ren oinarri bateraino, nahiz eta linealki independentea izan.

6.8. Izan bitez M A-modulua eta N M-ren azpimodulua.

(i) Baldin eta M/N modulu askea bada, frogatu N-k osagarri bat duela M-ren barruan. (Iradokizuna: Baldin eta $\{x_i + N\}_{i\in I}$ M/N-ren oinarria bada, ikusi $T = \langle x_i \mid i \in I\rangle$ N-ren osagarri bat dela.)

(ii) Ziurta daiteke N-k osagarri bat izango duela M-ren barruan N askea den kasuan?

6.9. Izan bedi G talde abeldarra, batuketarekiko idatzita. Frogatu G $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-moduluaren egitura duela baldin eta soilik baldin $nG = \{0\}$ bada.

6.10. Izan bitez M A-modulua eta N, T, U M-ren azpimoduluak. Baldin eta $U \subseteq T$ bada, frogatu

$$N \cap (T + U) = (N \cap T) + U$$

dela. Berdintza horri *lege modular* deitzen zaio. Erakutsi, kontradibide bat emanez, lege modularra ez dela oro har betetzen $U \subseteq T$ baldintza kentzen badugu.

6.11. Izan bedi M A-modulua. Orduan, $x \in M$ elementu baten *anulatzailea*

$$\operatorname{Ann} x = \{a \in A \mid ax = 0\}$$

multzoa da, eta M-ren anulatzailea, berriz,

$$\operatorname{Ann} M = \bigcap_{x\in M} \operatorname{Ann} x = \{a \in A \mid ax = 0 \text{ da } x \in M \text{ guztietarako}\}.$$

(i) Frogatu $\operatorname{Ann} x$ eta $\operatorname{Ann} M$ A-ren idealak direla.

(ii) Frogatu $Ax \cong A/\operatorname{Ann} x$ A-moduluen isomorfismoa. Beraz, modulu zikliko guztiak A-ren zatidura batekin isomorfoak dira.

(iii) Izan bedi $K[X]/(X^n)$ $K[X]$-modulua, K gorputza eta $n \in \mathbb{N}$ izanik. Kalkulatu $\operatorname{Ann} \overline{X^i}$ anulatzailea $1 \le i \le n$ guztietarako. Zein da $\operatorname{Ann} \overline{f(X)}$ baldin eta $f(X)$ ez bada X-ren multiploa? Zein da $\operatorname{Ann} K[X]/(X^n)$?

(iv) Oro har, $\mathfrak{a}$ A-ren ideala bada eta $A/\mathfrak{a}$ A-modulu gisa ikusten badugu, zein da $\operatorname{Ann} A/\mathfrak{a}$?

6.12. Izan bitez M_1 eta M_2 A-moduluak. Baldin eta $M_1 \cong M_2$ bada, frogatu $\operatorname{Ann} M_1 = \operatorname{Ann} M_2$ dela. Ba al da egia alderantzizkoa?

6.13. Izan bitez A eraztuna eta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ A-ren idealak. Frogatu $A/\mathfrak{a}$ eta $A/\mathfrak{b}$ isomorfoak direla A-modulu gisa baldin eta soilik baldin $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ bada. Ba al da emaitza hori egiazkoa isomorfismoa eraztun gisa hartzen badugu?