Ariketak

4.1. Frogatu $\mathbb{F}_2[X]$-n bigarren mailako polinomio irreduzible bakarra dagoela. Horretan oinarrituz, zerrendatu hirugarren eta laugarren mailako polinomio irreduzible guztiak $\mathbb{F}_2[X]$-n. Ba al dira irreduzibleak $X^5 + X + \overline{1}$ eta $X^5 + X^2 + \overline{1}$?

4.2. Frogatu $X^4 + 2X^3 + 6X^2 + 5X + 9$ polinomioa irreduziblea dela $\mathbb{Z}[X]$-n zein $\mathbb{Q}[X]$-n. (Laguntza: Erabilgarria da 4.1 ariketa.)

4.3. Izan bedi p zenbaki lehena. Frogatu

$$f(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$$

polinomioa irreduziblea dela $\mathbb{Z}[X]$-n zein $\mathbb{Q}[X]$-n. Polinomio horri *p. polinomio ziklotomikoa* deitzen zaio. (Iradokizuna: Baliokidea da $f(X+1)$ irreduziblea dela frogatzea, 3.1 ariketaren arabera.)

4.4. Izan bedi $m \in \mathbb{N}$.

(i) Baldin eta m bakoitia bada, frogatu $Y^2 - X^m$ polinomioa irreduziblea dela. Zer gertatzen da m bikoitia bada?

(ii) Baldin eta m ez bada 3aren multiploa, frogatu $Y^3 - X^m$ polinomioa irreduziblea dela. Zer gertatzen da m 3aren multiploa bada?

4.5. Izan bitez $m, n \in \mathbb{N}$ elkarrekiko lehenak. Frogatu $Y^n - X^m$ polinomioa irreduziblea dela. (Iradokizuna: Definitu $\varphi : K[X,Y] \longrightarrow K[T]$ homomorfismoa $X \longmapsto T^n$ eta $Y \longmapsto T^m$ esleipenen bitartez, eta jarraitu ohiko moduan.) Zer gertatzen da m eta n elkarrekiko lehenak ez badira?

4.6. Izan bitez p zenbaki lehena eta K gorputza, $\operatorname{char} K \neq p$ izanik. Frogatu $X^p + Y^p + Z^p$ polinomioa irreduziblea dela. (Iradokizuna: Bereizi $p = 2$ eta $p > 2$ den kasuak.)

4.7. Izan bedi $n \geq 2$.

(i) Aztertu $(X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1)$ ideal lehena den K gorputz baten gainean.

(ii) Aztertu $(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ ideal lehena den K gorputz baten gainean.

Iradokizuna bi kasuetarako: bereizi $\operatorname{char} K = 2$ eta $\operatorname{char} K \neq 2$ den kasuak, eta erabili indukzioa n-ren gainean.

4.8. Izan bitez K gorputza eta $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $f \neq 0$. Badakigunez, (f) ideala lehena da baldin eta soilik baldin f polinomioa irreduziblea bada. Problema honetan ikusten dugunez, emaitza hori ezin da hedatu ideala polinomio bat baino gehiagoren bidez sortuta dagoen kasura.

(i) Frogatu $(X^2 + 1, Y^2 + 1)$ ideala ez dela lehena $\mathbb{R}[X,Y]$-n, nahiz eta $X^2 + 1$ eta $Y^2 + 1$ polinomioak irreduzibleak izan.

(ii) Frogatu (X^2+1, X^2Y) ideala lehena dela $\mathbb{R}[X,Y]$-n, nahiz eta X^2Y polinomioa irreduziblea ez izan.

4.9. Izan bedi K gorputza eta $f(X), g(X) \in K[X]$. Frogatu $\mathfrak{a} = (f(X), Y - g(X))$ ideala lehena dela $K[X,Y]$-n baldin eta soilik baldin $f(X)$ irreduziblea bada. (Konparatu 4.8 ariketarekin.)

4.10. Deskribatu bi zatidura eraztun hauen ideal lehen guztiak:

(i) $K[X,Y]/(XY)$.

(ii) $K[X,Y]/(X^2, XY)$.

4.11. Izan bedi K gorputza. Aztertu $(X^2+Y^2+Z^2, Z-X^3)$ ideala lehena den edo ez. (Iradokizuna: Bereizi $\operatorname{char} K = 2$ eta $\operatorname{char} K \neq 2$ den kasuak.)

4.12. Aztertu ondorengo idealak lehenak diren edo ez (K gorputz baten gainean): (X^3+Y^2+Z), $(X^3-3XYZ+Y^3+Z^3)$, $(X^5+XYZ^5+Y^5ZT^5)$, (Y^6-X^4Z), $(X^4Y+Y^5Z+Z^6X)$, $(X-YZ, Z-XY)$, $(Y+2X^2, Z+3X^3, T-X^4-Y-Z)$, $(Y+2X^2, Z+3X^3, T^5-X^4-Y-Z)$.