Ariketak

2.1. Frogatu $(X^3 - Y^3, X^2Y - X) \subseteq (X^2 - Y, X - Y^2)$ partekotasuna. Ba al dira berdinak bi ideal horiek?

2.2. Frogatu idealen arteko berdintza hauek:

(i) $(X^2 + Y^2, X^2 - Y^2) = (X^2, Y^2)$, $\mathbb{Q}[X, Y]$ eraztunean.

(ii) $(Y - X^2, Z - X^3, Y^4 - YZ^2 + Z^3) = (X^9, Y - X^2, Z - X^3)$, $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ eraztunean.

Betetzen da (i) ataleko berdintza $\mathbb{Z}[X, Y]$ eraztunean?

2.3. Izan bitez A eraztuna eta $a \in A$. Existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $a^n = 0$ baita, orduan a elementu *nilpotentea* dela esaten dugu, eta hori betetzen duen n-rik txikienari a-ren *nilpotentzia-indizea* esaten zaio.

(i) Frogatu A-ren elementu nilpotenteek ideal bat osatzen dutela. (Laguntza: $a^m = b^n = 0$ bada, frogatu $(a + b)^{m+n-1} = 0$ dela.) Ideal horri A-ren *nilradikala* esaten zaio.

(ii) Kalkulatu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ eta $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ eraztunetako elementu nilpotente guztiak, eta eman horien nilpotentzia-indizeak.

(iii) Oro har, zein dira $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ko elementu nilpotente guztiak? (Laguntza: Kontuan hartu n-ren faktorizazioa zenbaki lehenetan.) Nolakoa izan behar du n-k $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ko elementu nilpotente bakarra $\overline{0}$ izan dadin?

2.4. Erabaki $\mathbb{Z}[X]$ eraztunaren azpimultzo hauek idealak diren edo ez:

(i) $\{\sum_{i\geq 0} a_iX^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_i \text{ bikoitia } i \text{ guztietarako}\}$.

(ii) $\{\sum_{i\geq 0} a_iX^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_i \text{ bikoitia } i \text{ bikoitia denean}\}$.

(iii) $\{\sum_{i\geq 0} a_iX^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_0 \text{ bikoitia}\}$.

Baiezkoan, eman ideal horien sistema sortzaile bat, ahal den elementu kopuru txikienarekin.

2.5. Frogatu

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2 + 1)} = \{\overline{aX + b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

dela, errepikapenik gabe. Ondorioztatu $\dim \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = 2$ dela.

2.6. Problema honetan aurreko ariketaren orokorpena ematen dugu. Izan bitez K gorputza eta $f(X) \in K[X]$ n. mailako polinomioa.

(i) Demagun $g(X) \in K[X]$ dela, eta izan bedi $r(X)$ polinomioa $f(X)$ $g(X)$-z zatitzean lortzen den hondarra. Ikusi $\overline{g(X)} = \overline{r(X)}$ berdintza betetzen dela $K[X]/(f(X))$ zatiduran. Konparatu emaitza hori $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ren kasuarekin.

(ii) Ondorioztatu

$$\frac{K[X]}{(f(X))} = \{\overline{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}} \mid a_i \in K,\ i \text{ guztietarako}\}$$

dela, errepikapenik gabe. Zein da $K[X]/(f(X))$-ren dimentsioa K-ren gainean?

(iii) Frogatu $\overline{g(X)}$ elementua alderanzgarria dela $K[X]/(f(X))$ zatidura eraztunean baldin eta soilik baldin $f(X)$ eta $g(X)$ elkarrekiko lehenak badira. (Laguntza: Inplikazioetako batean, erabili Bézouten identitatea.) Konparatu emaitza hori $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ren kasuarekin.

(iv) Ikusi $\overline{X^2+1}$ elementua alderanzgarria dela $\mathbb{R}[X]/(X^3+1)$ zatiduran, eta kalkulatu haren alderantzizkoa. Ba al da gorputza $\mathbb{R}[X]/(X^3+1)$?

(v) Frogatu $K[X]/(f(X))$ gorputza dela baldin eta soilik baldin $f(X)$ polinomioa irreduziblea bada $K[X]$-n. Konparatu emaitza hori $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ren kasuarekin.

2.7. Izan bitez A eraztuna eta A_0 A-ren azpieraztun lehena.

(i) Frogatu $A_0 \cong \mathbb{Z}$ edo $A_0 \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dela, A-ren karakteristika 0 edo $n > 0$ den arabera.

(ii) Demagun B beste eraztun bat dela, eta B_0 B-ren azpieraztun lehena dela. Orduan, $A_0 \cong B_0$ dugu baldin eta soilik baldin $\operatorname{char} A = \operatorname{char} B$ bada.

2.8. Baldin eta $\varphi : A \longrightarrow B$ eraztun-isomorfismoa bada, frogatu $\operatorname{char} A = \operatorname{char} B$ dela. Ba al da egiazkoa emaitza hori φ homomorfismoa besterik ez bada?

2.9. Izan bitez A eraztuna eta $\mathfrak{a}$ A-ren ideala. Propietate hau betetzen bada:

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ non } a^n \in \mathfrak{a} \ (a \in A \text{ izanik}) \implies a \in \mathfrak{a},$$

orduan $\mathfrak{a}$ A-ren *ideal erradikala* dela esaten dugu.

(i) Ohartu ideal lehen guztiak ideal erradikalak direla.

(ii) Frogatu $\mathfrak{a}$ ideal erradikala dela baldin eta soilik baldin $A/\mathfrak{a}$ zatidura eraztunak ez badu elementu nilpotenterik $\overline{0}$-z aparte.

(iii) Noiz da $n\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-ren ideal erradikala?

(iv) Frogatu korrespondentziaren teoremaren bitartez ideal erradikalak ideal erradikalekin elkartuta daudela.

2.10. Izan bedi $\varphi : A \longrightarrow B$ eraztun-isomorfismoa.

(i) Baldin eta $\mathfrak{a}$ A-ren ideala bada eta $\mathfrak{b} = \varphi(\mathfrak{a})$ jartzen badugu, frogatu $A/\mathfrak{a} \cong B/\mathfrak{b}$ dela.

(ii) Frogatu φ-k banan-banako korrespondentzia bat eratzen duela A-ren idealen eta B-ren idealen artean, eta korrespondentzia horren bitartez A-ren ideal maximalak B-ren ideal maximalekin, A-ren ideal lehenak B-ren ideal lehenekin, eta A-ren ideal erradikalak B-ren ideal erradikalekin elkartuta daudela.

2.11. Izan bitez A eta B eraztunak, eta $\mathfrak{a}$ eta $\mathfrak{b}$ A-ren eta B-ren idealak, hurrenez hurren. Frogatu $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ $A \times B$-ren ideala dela eta isomorfismo hau betetzen dela:

$$\frac{A \times B}{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}} \cong \frac{A}{\mathfrak{a}} \times \frac{B}{\mathfrak{b}}.$$

2.12. Izan bitez K gorputza eta $f(X) \in K[X]$. Frogatu baieztapen hauek, 2.6 ariketaz baliatuz:

(i) $(f(X))$ ideal maximala da $K[X]$-n baldin eta soilik baldin $f(X)$ polinomioa irreduziblea bada $K[X]$-n.
(ii) $(f(X))$ ideal lehena da $K[X]$-n baldin eta soilik baldin $f(X)$ polinomioa irreduziblea bada $K[X]$-n edo $f(X) = 0$ bada.

2.13. Izan bedi K gorputza.

(i) Baldin eta $a \in K$ bada, frogatu
$$\frac{K[X,Y]}{(X-a)} \cong K[Y]$$
isomorfismoa, eta ondorioztatu $(X-a)$ $K[X,Y]$-ren ideal lehena dela, baina ez maximala. Erakutsi $(X-a)$ baino handiagoa den $K[X,Y]$-ren ideal propio bat.
(ii) Oro har, $a_1, \ldots, a_r \in K$ badira, frogatu
$$\frac{K[X_1, \ldots, X_n]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_r - a_r)} \cong K[X_{r+1}, \ldots, X_n]$$
dela, eta ondorioztatu $(X_1 - a_1, \ldots, X_r - a_r)$ $K[X_1, \ldots, X_n]$-ren ideal lehena dela. Gainera, $(X_1 - a_1, \ldots, X_r - a_r)$ maximala da $K[X_1, \ldots, X_n]$-n baldin eta soilik baldin $r = n$ bada.

2.14. Aurreko ariketaren arabera, $\mathbb{R}[X,Y]/(Y-1) \cong \mathbb{R}[X]$ dugu. Erabili isomorfismo hori eta korrespondentziaren teorema erabakitzeko $(X^2+1, Y-1)$ ideal lehena edo maximala den $\mathbb{R}[X,Y]$ eraztunean. Zer gertatzen da $\mathbb{R}[X,Y]$-ren ordez $\mathbb{C}[X,Y]$ hartzen badugu?

2.15. Aztertu $(X^2+Y^2-Z^2, Y+1, Y^2-Y+Z)$ ideala lehena edo maximala den $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$, $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ eta $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ eraztunetan.

2.16. Izan bedi K gorputza. Frogatu $(Y-X^2, Z-X^3)$ $K[X,Y,Z]$-ren ideal lehena dela, baina ez maximala.

2.17. Frogatu
$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-1)} \cong \mathbb{Z}$$
isomorfismoa, eta ondorioztatu $(X-1)$ ideala lehena dela $\mathbb{Z}[X]$-n, baina ez maximala. Isomorfismo horretaz baliatuz, frogatu infinitu ideal desberdin daudela $(X-1)$-en eta $\mathbb{Z}[X]$-ren artean, eta eman espliziki ideal horiek sortzaileen bidez. Horietatik, zein dira lehenak/maximalak $\mathbb{Z}[X]$-n?

2.18. Aurreko 2.4 ariketan, emandako multzoa $\mathbb{Z}[X]$-ren ideala den kasuetan, erabaki ideal hori lehena edo maximala den. (Laguntza: Eraiki φ homomorfismo bat $\mathbb{Z}[X]$-tik eraztun egoki batera, φ-ren nukleoa darabilgun ideala den moduan.) Zer gertatzen da multzo horien definizioan bikoitia izateko baldintza n-rekin zatigarria izateko baldintzarekin ordezkatzen badugu, $n \in \mathbb{N}$ zenbaki finkoa izanik?

2.19. Izan bitez $\varphi : A \longrightarrow B$ eraztun-homomorfismoa eta $\mathfrak{a}$ A-ren ideala. Frogatu

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi} & : & A/\mathfrak{a} & \longrightarrow & B \\ & & \overline{a} & \longrightarrow & \overline{\varphi(a)} \end{array}$$

erregelak ondo definituriko aplikazioa ematen duela baldin eta soilik baldin $\mathfrak{a} \subseteq \ker \varphi$ bada.

2.20. Demagun A eraztunean $a_0^2 = -1$ betetzen duen elementu bat dagoela. Frogatu $i \mapsto a_0$ egokitzapena $\mathbb{Z}[i] \longmapsto A$ eraztun-homomorfismo bateraino luzatzen dela. (Erabili aurreko bi ariketak.) Emaitza horretan oinarrituz, eraiki $\varphi : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ eraztun-homomorfismo bat, $a + bi$ elementu orokor baten irudia esplizituki emanez.

2.21. Izan bedi $\varphi : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ aurreko ariketan eraikitako eraztun-homomorfismoa.

(i) Ikusi φ-k ondo definituta dagoen $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}[i]/(3+i) \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ homomorfismo bat induzitzen duela. (Laguntza: Erabili 2.19. ariketa.)

(ii) Frogatu $10 \in (3+i)$ dela eta ondorioztatu

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(3+i)} = \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq n \leq 9\}$$

dela.

(iii) Aurreko bi atalak konbinatuz, frogatu

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(3+i)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$$

isomorfismoa.

2.22. Askatu kongruentzia-sistema hauek:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 7 \\ x \equiv 8 & \pmod{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 1 & \pmod{11} \\ x \equiv 12 & \pmod{24} \\ x \equiv 3 & \pmod{25} \end{cases}$$

2.23. Halley kometa 76 urtean behin inguratzen da Lurrera, eta azken aldiz 1986 urtean egin zuen. Beste alde batetik, Temple-Tuttle kometa 33 urtean behin pasatzen da Lur albotik, eta horren azken bisita 1998koa da. Zein urtetan ikusi ahal izango ditugu bi kometak batera Lurrera hurbiltzen? Hale-Bopp kometa 1997 urtean pasatu bazen Lur alboan, eta kometa horren aurreko hurreratzea K.a. 2214 gertatu bazen, ikusi ahal izango ditugu inoiz hiru kometak aldi berean zeruan? Eta ondoz ondoko urteetan? (Oharra: Hale-Bopp kometaren periodoa kalkulatzean, kontuan izan gure egutegian ez dela 0 urtea existitzen.)