Ariketak

1.1. Frogatu ondorengo multzoak, ohiko batuketarekin eta biderketarekin, eraztunak direla. (Laguntza: Ikusi eraztun egoki baten azpieraztunak direla.)

(i) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.
(ii) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.
(iii) $\left\{\dfrac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
(iv) $\left\{\dfrac{a}{2^m 3^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$.

Adierazi eraztun hauek $\mathbb{Z}[S]$ moduan S azpimultzoren batentzat. Lor daiteke beti S-k elementu bakar bat izatea?

1.2. Aurreko ariketako (iii) eta (iv) ataletan, zehaztu eraztun horien unitateen taldeak.

1.3. Izan bedi $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$. Elementu horren *norma* horrela definitzen da:

$$N(a+bi) = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2.$$

(i) Frogatu $N((a+bi)(c+di)) = N(a+bi)N(c+di)$ propietatea betetzen dela.
(ii) Ondorioztatu $a+bi$ unitatea dela $\mathbb{Z}[i]$-n baldin eta soilik baldin $N(a+bi)=1$ bada.
(iii) Zerrendatu $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ unitatearen taldeko elementu guztiak.

1.4. Izan bedi

$$A = \{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

(i) Frogatu $a+b\sqrt[3]{2}$ eta $c+d\sqrt[3]{2}$ A-ko bi elementu berdinak direla baldin eta soilik baldin $a=c$ eta $b=d$ bada.
(ii) Frogatu $\sqrt[3]{4} \notin A$ dela, eta ondorioztatu A ez dela eraztuna. (Laguntza: Absurdora eramanez, adierazi $\sqrt[3]{4}$ erroa A-ko elementua balitz bezala. Biderkatu $\sqrt[3]{2}$-z eta kontuan hartu (i) atala.)
(iii) Aurreko atalaren arabera, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ eraztuna A baino handiagoa da. Frogatu

$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}.$$

dela.

1.5. Izan bedi A eraztuna. Ba al dira eraztunak $A[X]$-ren azpimultzo hauek?

(i) $\{\sum_{i\geq 0} a_i X^i \in A[X] \mid a_1 = 0\}$.
(ii) $\{\sum_{i\geq 0} a_i X^i \in A[X] \mid a_2 = 0\}$.
(iii) $\{\sum_{i\geq 0} a_i X^i \in A[X] \mid a_i = 0,\ i$ bakoitia denean$\}$.

1.6. Izan bedi A eraztuna. Frogatu X indeterminatua sinplifikagarria dela biderketarekiko $A[X]$ polinomioen eraztunean. Ba al da X $A[X]$-ren unitatea?

1.7. Izan bitez A eta B eraztunak.

(i) Frogatu $\mathcal{U}(A \times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$ dela.
(ii) Deskribatu $A \times B$-ren zeroren zatitzaileak.
(iii) A eta B gorputzak badira, ikusi $A \times B$ ez dela gorputza.

1.8. Kalkulatu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ eta $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ eraztunen zeroren zatitzaile guztiak. Oro har, zein dira $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ren zeroren zatitzaileak? Noiz da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ integritate-domeinua?

1.9. Izan bedi A integritate-domeinu finitua. Frogatu A gorputza dela. (Laguntza: Ikusteko $a \neq 0$ elementuak alderantzizkoa duela, kontuan hartu $f : A \longrightarrow A$ aplikazioa non $f(x) = ax$ baita.)

1.10. Teorian ikusi dugunez, A integritate-domeinua denean, $\mathcal{U}(A[X]) = \mathcal{U}(A)$ dugu. Problema honen helburua da berdintza hori zein eraztunetarako betetzen den erabakitzea. Zehazkiago, frogatuko dugu $\mathcal{U}(A[X]) = \mathcal{U}(A)$ dela baldin eta soilik baldin A-k ez badu elementu nilpotente ez-nulurik. (Eraztun batean a elementu bat *nilpotentea* dela diogu existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $a^n = 0$ baita; ikusi beranduago 2.3 problema.) Emaitza hori modu kontrapositiboan frogatuko dugu: existitzen da $f \in \mathcal{U}(A[X])$ non $\deg f \geq 1$ baita baldin eta soilik baldin A-n elementu nilpotente ez-nuluren bat badago. Hasteko, demagun $f \in \mathcal{U}(A[X])$ dela, $\deg f \geq 1$ izanik. Izan bedi $g \in A[X]$ f-ren alderantzizkoa, eta idatz dezagun

$$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \qquad \text{eta} \qquad g(X) = b_m X^m + \cdots + b_0,$$

a_n eta b_m ez-nuluak izanik. Orokortasuna galdu gabe, $n \geq m$ den baldintzapean lan egin dezakegu.

(i) Frogatu a_0 eta b_0 A-ren unitateak direla.
(ii) Frogatu, i-ren gaineko indukzioa erabiliz, $a_n^{i+1} b_{m-i} = 0$ dela $i = 0, \ldots, m$ guztietarako. (Laguntza: Berdindu zerorekin X^{n+m-i}-ren koefizientea fg biderkaduran, biderkatu a_n^i-z, eta aplikatu indukzio-hipotesia.)
(iii) Aurreko ataletatik, ondorioztatu a_n A-ren elementu nilpotente ez-nulua dela.

Orain, alderantzizkoa frogatuko dugu. Horretarako, demagun $a \in A$ elementu nilpotente ez-nulua dela.

(iv) Frogatu badagoela a-ren berretura egoki bat, b, non $b \neq 0$ eta $b^2 = 0$ baita.
(v) Ikusi $bX + 1$ polinomioa unitatea dela $A[X]$-n.

Horrela bukatutzat eman dezakegu ikusi nahi genuen emaitzaren froga. Azken bi ataletan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ moduko eraztunei aplikatuko diegu.

(vi) Izan bedi $n \in \mathbb{N}$. Frogatu $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dela baldin eta soilik badin n karratugabea bada, hau da, n-ren faktorizazioan agertzen diren zenbaki lehen guztiek 1 berretzailea badute.
(vii) Eman konstantea ez den unitate bana $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}[X]$ eta $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}[X]$ eraztunetan.

1.11. Izan bedi $S = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ bakoitia}\}$, eta ohartu S $\mathbb{Z}$-ren azpimultzo biderkakorra dela. Kalkulatu $\mathcal{U}(S^{-1}\mathbb{Z})$ unitateen taldea.

1.12. Izan bedi $\mathcal{P}$ zenbaki lehenen multzo bat, eta dei diezaiogun S $\mathcal{P}$-k sortzen duen $\mathbb{Z}$-ren azpimultzo biderkakorrari. Frogatu $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1/p \mid p \in \mathcal{P}]$ dela.