2. Gaia: Programen Espezifikazioa

1. Ariketa-orria.

1. Ondoko aukeren artean identifikatu zuzenak diren formulak edo baieztapenak (bat baino gehiago izan daitezke zuzenak):

1.1. x zenbaki lehena da.

a) $lehena(x) \equiv x > 0 \wedge \forall i\ (\ 1 < i < x \rightarrow x\ mod\ i \neq 0\ )$ [X]

b) $lehena(x) \equiv x > 0 \wedge \exists i\ (\ 1 < i < x \wedge x\ mod\ i \neq 0\ )$ [ ]

c) $lehena(x) \equiv \forall i\ (\ 1 < i < x \rightarrow x\ mod\ i \neq 0\ )$ [ ]

1.2. x da $A(1..n)$ bektoreko elementurik handiena.

a) $handiena(A(1..n), x) \equiv$ [X]

$\exists i\ (\ 1 \leq i \leq n \wedge A(i) = x) \wedge \forall j\ (\ 1 \leq j \leq n \rightarrow x \geq A(j)\ )$

b) $handiena(A(1..n), x) \equiv$ [ ]

$1 \leq i \leq n \wedge A(i) = x \wedge \forall j\ (\ 1 \leq j \leq n \rightarrow x \geq A(j)\ )$

c) $handiena(A(1..n), x) \equiv$ [ ]

$\exists i\ (\ 1 \leq i \leq n \wedge A(i) = x) \wedge \forall j\ (\ 1 \leq j \leq n \rightarrow A(i) \geq A(j)\ )$

1.3. Osoko $A(1..n)$ bektorearen i-garren elementuaren ondoren dauden guztiak zeroak dira.

a) $1 \leq i \leq n \wedge \forall j\ (\ i < j \leq n \rightarrow A(j) = 0\ )$ [X]

b) $0 < i \leq n \wedge \neg\exists j\ (\ i < j \leq n \wedge A(j) \neq 0\ )$ [X]

c) $\exists i\ (1 \leq i \leq n \wedge \forall j\ (\ i < j \leq n \rightarrow A(j) = 0\ )\ )$ [ ]

1.4. $A(1..n)$ bektorean x badago, $i..j$ sekzioan egongo da.

a) $1 \leq i \leq j \leq n \wedge (\ \exists k\ (\ i \leq k \leq j \wedge x = A(k)\ ) \vee$ [ ]

$\forall k\ (\ i \leq k \leq j \rightarrow x \neq A(k)\ )\ )$

b) $\exists k\ (\ i \leq k \leq j \wedge x = A(k)\ ) \vee \forall k\ (\ 1 \leq k \leq n \rightarrow x \neq A(k)\ )$ [X]

c) $\neg\exists k\ (\ 1 \leq k < i \wedge x = A(k)\ ) \wedge \neg\exists k\ (\ j < k \leq n \wedge x = A(k)\ )$ [X]

1.5. $A(1..n)$ bektorean ez dago elementu errepikaturik.

a) $\forall i\ (\ 1 \leq i \leq n \rightarrow \forall j\ (\ i < j \leq n \rightarrow A(i) \neq A(j)\ )\ )$ [X]

b) $\forall i\ (\ 1 \leq i \leq n \rightarrow \mathcal{N} j\ (\ 1 \leq j \leq n \wedge A(i) = A(j)\ ) = 1\ )$ [X]

c) $\forall i\ \forall j\ (\ 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j \rightarrow A(i) \neq A(j)\ )$ [X]

1.6. $A(1..n)$ osoko bektorean lehenengo elementua baino handiagoak diren elementuen kopurua k da.

a) $k = \mathcal{N} i\ (\ 1 < i \leq n \wedge A(i) > A(1)\ )$ [X]

b) $k = \mathcal{N} i\ (\ 1 \leq i \leq n \wedge A(i) > A(1)\ )$ [X]

c) $A(1) < \mathcal{N} i\ (\ 1 \leq i \leq n \wedge A(i) = k\ )$ [ ]

1.7. $A(1..n)$ bektoreko elementuak gorantz ordenatuta daude.

a) $GorantzOrdenatuta(A(1..n)) \equiv$ [ ]
$$\forall i\ (\ 1 \le i \le n\ \rightarrow\ A(i) < A(i+1)\ )$$
b) $GorantzOrdenatuta(A(1..n)) \equiv$ [X]
$$\forall i\ (\ 1 \le i < n\ \rightarrow\ A(i) < A(i+1)\ )$$
c) $GorantzOrdenatuta(A(1..n)) \equiv$ [ ]
$$\forall i\ (\ 1 \le i \le n\ \rightarrow\ A(i-1) < A(i)\ )$$

1.8. $A(1..n)$ bektoreko bi elkarren ondoko elementuen artean dagoen diferentziarik handiena (balio absolutuan) k da.

a) $\exists i\ (\ 1 < i \le n\ \wedge\ |A(i) - A(i-1)| = k\ )\ \wedge$ [X]
$$\forall j\ (\ 1 < j \le n\ \rightarrow\ |A(j) - A(j-1)| \le k\ )$$
b) $\exists i\ (\ 1 < i \le n\ \wedge\ |A(i) - A(i-1)| = k\ )\ \wedge$ [ ]
$$\forall j\ (\ 1 < j \le n \wedge i \ne j\ \rightarrow\ |A(j) - A(j-1)| \le k\ )$$
c) $\exists i\ (\ 1 < i \le n\ \wedge\ |A(i) - A(i-1)| = k\ )\ \wedge$ [ ]
$$\forall j\ (\ 1 < j \le n \wedge i \ne j\ \rightarrow\ |A(j) - A(j-1)| < k\ )$$

1.9. Post-baldintza zuzenak aukeratu.

$\{\ n \ge 1\ \}$

```
i := 0; aurkitua := false;
while i < n and not aurkitua loop
   i := i+1;
   aurkitua := A(i)=x;
end loop;
pos := i;
```

a) $\{\ (\ aurkitua\ \leftrightarrow\ \exists k\ (\ 1 \le k \le n\ \wedge\ A(k) = x\ )\ )\ \wedge$ [X]
$$(\ aurkitua\ \rightarrow\ A(pos) = x\ )\ \}$$

b) $\{\ (\ aurkitua\ \wedge\ A(pos) = x\ )\ \vee\ (\ \neg aurkitua\ \wedge\ A(pos) \ne x\ )\ \}$ [ ]

c) $\{\ A(pos) = x\ \leftrightarrow\ aurkitua\ \}$ [ ]

2. Ondoko formuletan hutsuneak (___) bete:

2.1. $A(1..n)$ bektoreko $A(i..j)$ sekzioan y aldiz agertzen da x.

$$agerpenKopurua(x, A(1..n), i, j, y)\ \equiv$$
$$1 \le i \le j \le n\ \wedge\ \underline{\ y\ } = \mathcal{N}k\ (\ i \le k \le j\ \wedge\ A(k) = \underline{\ x\ }\ )$$

2.2. $P(1..n)$ karakterezko bektorean ez daude bi zuriune jarraian.

$$\forall i\ (\ 1\ \underline{\ \le\ }\ i\ \underline{\ <\ }\ n\ \rightarrow\ (\ P(i) \ne \text{` '}\ \vee\ P(i+1) \ne \text{` '}\ )\ )$$

2.3. $B(1..n)$ $A(1..n)$-ren permutazioa da.

$$\begin{aligned} permutazioa(A(1..n), B(1..n)) \;\equiv\; \forall i\; (\; 1 \le i \le n \;\rightarrow \\ \mathcal{N} j\; (\; 1 \le j \le n \;\wedge\; A(i) = \underline{\;A(j)\;} \;) = \\ \mathcal{N} k\; (\; 1 \le k \le n \;\wedge\; A(i) = \underline{\;A(k)\;} \;) \;) \end{aligned}$$

2.4. $A(1..n)$ bektoreko elementu bakoitza bitan errepikatzen da.

$$\forall i\; (\; 1 \le i \le n \;\rightarrow\; agerpenKopurua(\underline{\;A(i), A(1..n), 1, n, 2\;}) \;)$$

2.5. $A(1..n)$-k ez dauka elementu errepikaturik.

$$\forall i\; (\; 1 \le i \le n \;\rightarrow\; agerpenKopurua(\underline{\;A(i), A(1..n), 1, n, 1\;}) \;)$$

2.6. x $A(1..n)$ bektorean i posizioa baino lehenago agertzen den ala ez itzultzen du Dago izeneko aldagaian.

Aurre $\equiv \{ \; 1 \le \underline{\;i\;} \le n \; \}$
Post $\equiv \{ \; \underline{\;Dago\;} \;\leftrightarrow\; \exists j\; (\; 1 \le j < i \;\wedge\; A(j) = x \;) \; \}$

2.7. Osoko elementuz osatutako $A(1..n)$ bektorean $A(i..j)$ sekzioko elementuen batura x aldagaian itzultzen du.

Aurre $\equiv \{ \; 1 \le i \le j \le n \; \}$
Post $\equiv \{ \; \underline{\;x\;} = \sum_{k=i}^{j} A(k) \; \}$

2.8. A bektorea errotatu egiten du, hau da, osagai guztiak posizio bat eskuinera eramaten du.

Aurre $\equiv \{ \; n \ge 1 \;\wedge\; \forall i\; (\; 1 \le i \le n \;\rightarrow\; A(i) = a_i \;) \; \}$
Post $\equiv \{ \; \forall i\; (\; 2 \le i \le n \;\rightarrow\; A(i) = \underline{\;a_{i-1}\;} \;) \;\wedge\; A(1) = \underline{\;a_n\;} \; \}$

3. Idatzi euskaraz formula hauen esanahia:

3.1. $\forall i\; (\; 2 \le i \le n \;\rightarrow\; A(1) \ne A(i) \;)$

Soluzioa: A bektorearen lehenengo osagaia beste guztien desberdina da.

3.2. $\exists i\; (\; i > 0 \;\wedge\; \frac{x}{i} = z \;)$

Soluzioa: x zenbakiaren i zatiketa osoa z da.

3.3. $\forall i\; (\; 1 \le i \le n \;\rightarrow\; A(i)\; mod\; 2 = 0 \;)$

Soluzioa: A bektorearen osagai guztiak bikoitiak dira.

3.4. $\exists i\; (\; 1 \le i \le 6 \;\wedge\; \forall j\; (\; 6 < j \le n \;\rightarrow\; A(i) \ge A(j) \;) \;) \;\wedge\; 6 \le n$

Soluzioa: A bektorearen lehenengo sei osagaien artean A bektoreko osagai handiena dago (baina ez dakigu zein den).

3.5. $1 \le ind \le 6 \;\wedge\; \forall j\; (\; 6 < j \le n \;\rightarrow\; A(ind) \ge A(j) \;)$

Soluzioa: A bektorearen ind-garren osagaia, lehenengo sei osagai artean dagoena, A bektoreko osagai handiena da.

3.6. $\forall j \forall k \; (\; 1 \leq j \leq n \wedge 1 \leq k \leq m \wedge j \neq k \; \rightarrow \; A(j) \neq B(k) \;)$

Soluzioa: A eta B bektoreek ez dute osagairik partekatzen.

3.7. $\mathcal{N} i \; (\; 1 \leq i \leq k \; \wedge \; A(i) = 4 \;) \; = \; 2$

Soluzioa: A bektorearen lehenengo k posizioetan 4a bi aldiz agertzen da.

4. Idatzi ondoko baieztapenak lehen mailako formulez:

4.1. x $A(1..n)$ bektorean dago.

Soluzioa:

$$agertzenDa(x, A(1..n)) \; \equiv \; \exists i \; (\; 1 \leq i \leq n \; \wedge \; x = A(i) \;)$$

4.2. x $A(1..n)$ bektorean agertzen den lehenengo posizioa k da.

Soluzioa:

$$1 \leq k \leq n \; \wedge \; A(k) = x \; \wedge \; \forall i \; (\; 1 \leq i < k \; \rightarrow \; A(i) \neq x \;)$$

4.3. Bat zenbakiarekin hasten den ondoz-ondoko zenbaki osokoen sekuentzia bat osatzen duten zenbakien batura z da. Adibidez, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Soluzioa:

$$\exists i \; (\; i \geq 1 \; \wedge \; z = \sum_{j=1}^{i} j \;)$$

4.4. x y baino handiago den 2ren berredura txikiena da.

Soluzioa:

$$x > y \; \wedge \; \exists i \; (\; i \geq 0 \; \wedge \; x = 2^i \; \wedge 2^{i-1} \leq y \;)$$

4.5. x da $A(1..n)$ bektoreko elementurik txikiena.

Soluzioa:

$$agertzenDa(x, A(1..n)) \; \wedge \; \forall j \; (\; 1 \leq j \leq n \; \rightarrow \; x \leq A(j) \;)$$

4.6. $A(1..n)$ bektoreko $A(i..j)$ sekzioan elementu handiena x da.

Soluzioa:

$$agertzenDa(x, A(i..j)) \; \wedge \; \forall k \; (\; i \leq k \leq j \; \rightarrow \; x \geq A(k) \;)$$

4.7. $A(1..n)$ bektoreak k zero dauzka.

Soluzioa:

$$k = \mathcal{N} i \; (\; 1 \leq i \leq n \; \wedge \; A(i) = 0 \;)$$

4.8. i posizioak $A(1..n)$ bektorea bitan banatzen du, $A(i)$ baino txikiagoak batetik eta $A(i)$ baino handiagoak bestetik.

Soluzioa:

$$\begin{aligned} & 1 \leq i \leq n \; \wedge \\ & \qquad (\; \forall j \; (\; 1 \leq j < i \; \rightarrow \; A(j) < x \;) \; \wedge \; \forall j \; (\; i < j \leq n \; \rightarrow \; A(j) > x \;) \; \vee \\ & \qquad \; \forall j \; (\; 1 \leq j < i \; \rightarrow \; A(j) > x \;) \; \wedge \; \forall j \; (\; i < j \leq n \; \rightarrow \; A(j) < x \;) \;) \end{aligned}$$

4.9. $A(1..n)$ bektoreak badauka zehazki k zerotako sekzio bat.

Soluzioa:

$$\mathcal{N}i\ (\ 1 \leq i \leq n-k+1\ \wedge\ \forall j\ (\ i \leq j \leq i+k-1\ \rightarrow\ A(j)=0\ )\ ) = 1$$

4.10. $S(1..n)$-ko edozein elementu bakoiti bere ondorengo guztien baturaren berdina da.

Soluzioa:

$$\forall i\ (\ 1 \leq i \leq n\ \wedge\ \ S(i)\ mod\ 2 \neq 0\ \rightarrow\ S(i) = \sum_{j=i+1}^{n} S(j)\ )$$

4.11. $A(1..n)$ bektorean batekoz (soilik batekoz) osatutako sekuentziarik luzeena i posizioan hasten da, eta sekuentzia horren luzera y da.

Soluzioa:

$$\begin{aligned}&\forall j\ (\ i \leq j \leq i+y-1\ \rightarrow\ A(j)=1\ )\ \wedge\\ &\qquad \forall j\ (\ 1 \leq j \leq n-y+1 \wedge j \neq i\ \rightarrow\\ &\qquad\qquad \mathcal{N}k\ (\ j \leq k \leq j+y-1\ \wedge\ A(k)=1\ ) < y\ )\end{aligned}$$

4.12. $A(1..n)$-k digituak dauzka eta x zenbaki arrunta errepresentatzen du.

Soluzioa:

$$\forall i\ (\ 1 \leq i \leq n\ \rightarrow\ 0 \leq A(i) \leq 9\ )\ \wedge\ x = \sum_{i=1}^{n}(\ 10^{i-1} \times A(i)\ )$$

4.13. $A(1..n)$-k digituak dauzka eta zenbaki kapikua errepresentatzen du.

Soluzioa:

$$\forall i\ (\ 1 \leq i \leq \tfrac{n}{2}+1\ \rightarrow\ (\ 0 \leq A(i) \leq 9\ \wedge\ A(i) = A(n-i+1)\ )\ )$$

edo

$$\begin{aligned}&\forall i\ (\ 1 \leq i \leq n\ \rightarrow\ 0 \leq A(i) \leq 9\ )\ \wedge\\ &\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n}(\ 10^{j-1} \times A(j)\ ) = \sum_{k=1}^{n}(\ 10^{k-1} \times A(n-k+1)\ )\end{aligned}$$

4.14. $A(1..n)$ bektorea $B(1..m)$-ren azpi-bektorea da.

Soluzioa:

$$\exists i\ (\ 1 \leq i \leq m-n+1\ \wedge\ \forall j\ (\ 1 \leq j \leq n\ \rightarrow\ A(j) = B(i+j-1)\ )\ )$$

4.15. k da A bektorean hertsiki gorakorra den hasierako sekziorik luzeenaren luzera.

Soluzioa:

$$\begin{aligned}&(\ 1 \leq k < n\ \wedge\ \forall i\ (\ 1 \leq i < k\ \rightarrow\ A(i) \leq A(i+1)\ )\ \wedge\ A(k) > A(k+1)\ ) \vee\\ &\qquad (\ k = n\ \wedge\ \forall i\ (\ 1 \leq i < k\ \rightarrow\ A(i) \leq A(i+1)\ )\ )\end{aligned}$$

5. Laugarren ariketako formulei predikatuak egokitu (beren aldagai libreetan oinarrituta) eta ondoko baieztapenak formalizatzeko erabili:

5.1. x eta z elkarren segidako zenbaki lehenak dira.

Soluzioa:

$$elkarrenSegidakoZenbakiLehenak(x, z) \equiv x < z \wedge lehena(x) \wedge$$
$$lehena(z) \wedge \forall i \; (\; x < i < z \rightarrow \neg lehena(i) \;)$$

5.2. $T(1..n)$ bektoreko elementu handiena k posizioan dago.

Soluzioa:

$$handiena(T(1..n), T(k))$$

5.3. $B(1..n)$ $A(1..n)$ da gorantz ordenatuta.

Soluzioa:

$$permutazioa(A(1..n), B(1..n)) \wedge gorantzOrdenatuta(B(1..n))$$

5.4. $B(1..n)$-k $A(1..n)$-ko elementu guztien agerpen-kopurua adierazten du.

Soluzioa:

$$\forall i \; (\; 1 \leq i \leq n \rightarrow agerpenKopurua(A(i), A(1..n), 1, n, B(i)) \;)$$

5.5. $A(1..n)$ bektorean gehien agertzen den elementua x da.

Soluzioa:

$$\exists k \; (\; k > 0 \wedge agerpenKopurua(x, A(1..n), 1, n, k) \wedge$$
$$\forall i \; (\; 1 \leq i \leq n \wedge (\; A(i) \neq x \rightarrow$$
$$\exists j \; (\; 0 < j < k \wedge agerpenKopurua(A(i), A(1..n), 1, n, j) \;) \;) \;) \;)$$

5.6. $A(1..n)$ bektorean goranzko ordenan agertzen dira ondoz-ondoko n zenbaki lehenak (ez dute zertan lehenengo n zenbaki lehenak izan behar).

Soluzioa:

$$\forall i \; (\; 1 \leq i < n \rightarrow elkarrenSegidakoZenbakiLehenak(A(i), A(i+1)) \;)$$

6. Idatzi ondoko ekintzen aurre-ondoetako espezifikazio formala:

6.1. A bektoreko osagaiak permutatzen ditu.

Soluzioa:

$$\text{Aurre} \equiv \{ \; n \geq 1 \wedge \forall i \; (\; 1 \leq i \leq n \rightarrow A(i) = a_i \;) \; \}$$
$$\text{Post} \equiv \{ \; permutazioa(A, (a_1, \ldots, a_n)) \; \}$$

6.2. A bektoreko osagaiak gorantz ordenatzen ditu.

Soluzioa:

$$\begin{aligned}
\text{Aurre} &\equiv \{\ n \geq 1\ \wedge\ \forall i\ (\ 1 \leq i \leq n\ \rightarrow\ A(i) = a_i\ )\ \} \\
&\equiv \{\ n \geq 1\ \wedge\ A(1..n) = (a_1, \ldots, a_n)\ \} \\
\text{Post} &\equiv \{\ \mathit{permutazioa}((a_1, \ldots, a_n), A)\ \wedge\ \mathit{gorantzOrdenatuta}(A)\ \}
\end{aligned}$$

6.3. $A(1..n)$ bektore batek zerra forma duen ala ez erabakitzen du.

$A(1..n)$ bektoreak zerra forma du baldin eta soilik baldin jarraian dauden edozein hiru elementu hartuta, lehenengo bien ordena (gorakorra/beherakorra) ondorengo bien ordenaren kontrakoa bada.
Adibidez,

$A(1..7) = (5, 2, 7, 4, 8, 3, 6)$ zerra formako bektorea da,

$A(1..5) = (3, 4, 2, 1, 6)$ ez da zerra formakoa.

Soluzioa:

$$\begin{aligned}
\text{Aurre} &\equiv \{\ n \geq 3\ \} \\
\text{Post} &\equiv \{\ \forall i\ (\ 1 < i < n\ \rightarrow\ (\ (\ A(i-1) < A(i)\ \wedge\ A(i) > A(i+1)\ )\ \vee \\
&\qquad (\ A(i-1) > A(i)\ \wedge\ A(i) < A(i+1)\ )\ )\ )\ \}
\end{aligned}$$

7. Idatzi ondoko azpiprogramaren aurre-ondoetako espezifikazio formala:

7.1.

```
f := 1; t := x;
while t >= 1 loop
   f := f*t;
   t := t-1;
end loop;
```

Soluzioa:

$\{\ x \geq 0\ \}$

```
f := 1; t := x;
while t >= 1 loop
   f := f*t;
   t := t-1;
end loop;
```

$\{\ f = \prod_{i=1}^{x} i\ \}$

7.2.

```
z := a;
while b /= 0 loop
   z := a mod b;
   a := b;
   b := z;
end loop;
```

Soluzioa:

$\{ \ a \geq b \geq 0 \ \}$

```
   z := a;
   while b /= 0 loop
      z := a mod b;
      a := b;
      b := z;
   end loop;
```

$\{ \ z = zkh(a,b) \ \} \equiv$

$\{ \ 1 \leq z \leq b \ \wedge \ a \, mod \, z = 0 \ \wedge \ b \, mod \, z = 0 \ \wedge$

$\quad \forall i \ (\ z+1 \leq i \leq b \ \rightarrow \ a \, mod \, i \neq 0 \ \vee \ b \, mod \, i \neq 0 \ ) \ \}$