

4. DATU-MOTEN ESPEZIFIKAZIO EKUAZIONALA

4.1. Datu-mota abstraktuak.

4.2. Espezifikazio ekuazionalaren teknika

4.3. Datu-mota abstraktu oinarrizkoen espezifikazio ekuazionala

4.1.- Datu-mota abstraktuak

Oinarrizko datu-motak: osokoak, boolearrak,...

Beren gainean arrazoitzeko:

- motaren eragiketen gaineko espresioak

$$(x+y)-(z+1), \quad (x \wedge y) \rightarrow \neg z, \quad \dots$$

- eragiketen propietate algebraikoak

$$+ \textit{elkarkorra}, \quad \neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y), \quad \dots$$

- datuen errepresentazioarekiko eta eragiketen implementazioarekiko independentea

DMAk: implementazioaren abstrakzioa eginez
propietateak erabili

DMAen erabileraren abantailak

- Abstrakzio-maila handiagoa.
- Betetzen dituzten propietateez arrazoitzeko aukera.
- DMA inplementatzen duten eta erabiltzen duten programen egiaztapen independentea.
- DMAren inplementazio-aldaiketek ez dute eraginik erabiltzen dutenetan.

Espezifikazio ekuazionala (algebraikoa)

- Signatura motak eta eragiketak deskribatzen ditu
- Ekuazioak signaturako eragiketen eragina deskribatzen du

Adibidea:

mota kontagailu

eragiketak

hutsa: \rightarrow kontagailu

gehi, gutxi: kontagailu \rightarrow kontagailu

ekuazioak

gutxi (gehi (x)) = x

Espezifikazio ekuazionala (II)

- Signatura

- motak

- eragiketak : izena
 zenbat eta zein motatako argumentuak
 eta emaitza

Motako espresioen (terminoen) sintaxia

Espezifikazio ekuazionala (III)

- Ekuzazioak: Propietate algebraikoak deskribatzen dituzte

$$t1 = t2$$

t1 eta t2 terminoek balio bera dute

$$t1 = t2 \text{ baldin } t3 = t4$$

baldintzazko ekuzazioak

$$t = \text{errorea}$$

errore-ekuzazioak

Ekuzazioak unibertsalki kuantifikatuta daudela suposatzen da:

$$x+0=x \quad \text{“edozein } x\text{-tarako (osokoa)”}$$

Errore-propagazioa:

$$\text{Baldin } x/0=\text{errorea} \text{ orduan } (x/0)+y=\text{errorea} \text{ da baita ere}$$

DMAen eragiketen sailkapena

- ↳ Eraikitzaileak: *Motako objektu guztiak definitzeko aukera ematen dute*
 - ↳ Aratzak: *Termino bakoitzak objektu desberdin bat adierazten du*
 - ↳ Ez-aratzak: *Objektu bat termino bat baino gehiagoz adieraz daiteke*
(kasu hau ez dugu aztertuko)

- ↳ Ez-eraikitzaileak
 - ↳ Kontsultarako
 - ↳ Aldaketarako
 - ↳ Laguntzaileak

Adibideak

Zenbaki arruntak eraikitzaile aratzekin: zero eta hur

mota

Nat

eragiketak

zero: \rightarrow Nat

hur: Nat \rightarrow Nat

aurre: Nat \rightarrow Nat

ekuazioak

aurre(zero)=errore

aurre(hur(x))=x

Motako objektuak: zero, hur(zero), hur(hur(zero)), ...

Denak desberdinak dira elkarren artean.

4.2.- Espezifikazio ekuazionalaren teknika

- Eraikitzaileek motako objektuak zein diren adierazten dute.
- Eragiketa ez-eraikitzailea definitzeko ekuazio bat definitzen da eraikitzaile bakoitzaren gainean (indukzioa).

$$(1) \text{ aurre}(zero) =$$

$$(2) \text{ aurre}(hur(zero)) =$$

- Eragiketa bat definitu gabe dagoenean eraikitzaile baten gainean, errore-ekuazioa ematen da.

$$(1) \text{ aurre}(zero) = \text{errorea}$$

Adibidea: kontagailu DMA

mota kontagailu

lag Nat

eragiketak

hutsa: \rightarrow kontagailu	<i>(eraik.)</i>
gehi: kontagailu \rightarrow kontagailu	<i>(eraik.)</i>
gutxi: kontagailu \rightarrow kontagailu	<i>(aldaketa)</i>
reset: kontagailu \rightarrow kontagailu	<i>(aldaketa)</i>
balioa: kontagailu \rightarrow Nat	<i>(kontsulta)</i>

Adibidea: kontagailu DMA

ekuazioak

Ez-erakitzaile bakoitza
erakitzaile bakoitzaren
gainen

$$(1) \text{ gutxi}(\text{hutsa}) = \text{errore} \text{ (*errore-ekuazioa*)}$$

$$(2) \text{ gutxi}(\text{gehi}(x)) = x$$

$$(3) \text{ reset}(\text{hutsa}) = \text{hutsa}$$

$$(4) \text{ reset}(\text{gehi}(x)) = \text{hutsa}$$

$$(5) \text{ balioa}(\text{hutsa}) = \text{zero}$$

$$(6) \text{ balioa}(\text{gehi}(x)) = \text{hur}(\text{balioa}(x))$$

Espezifikazio ekuazionalerako teknika (II)

Aberasketak: beste eragiketa batzuk gehitzeko

- Aurrez definitutako oinarri DMA baten (edo gehiagoren) gain
- Beste DMAk erabiliz
- Oinarri moten eraikitzaileen gaineko ekuazioak

Adibidea: gehitu *zeroa_da?* eragiketa Nat DMAri

mota Nat

lag Bool

eragiketak:

zeroa_da?: Nat \rightarrow Bool

ekuazioak:

(1) *zeroa_da?*(zero) = True

(2) *zeroa_da?*(hur(x)) = False

Espezifikazio ekuazionalerako teknika (III)

Parametrizazioa

- DMA baten espezifikazioan egon litezke zehaztu gabeko motak: *parametroak*.
- Datu-mota egituratuen eragiketak eta propietateak definitzeko gehienetan ez da beharrezkoa elementuen mota ezagutzea.
- Adibidez, hori gertatzen da pilen, ilaren, sekuentzien, zuhaitzen eta abarren kasuan.
- Hiru DMA horiek aztertuko ditugu: *Sekuentzia(T)*, *Pila(T)* eta *Arbit(T)*, non T parametroak elementuen mota adierazten duen.

4.3.- Datu-Mota Abstraktu oinarritzko batzuen espezifikazio ekuazionala

mota **sekuentzia(T)**

lag Bool

eragiketak

$\langle \rangle : \rightarrow \text{sekuentzia}(T)$

$_ \bullet _ : T \times \text{sekuentzia}(T) \rightarrow \text{sekuentzia}(T)$

lehena: $\text{sekuentzia}(T) \rightarrow T$

hondarra: $\text{sekuentzia}(T) \rightarrow \text{sekuentzia}(T)$

hutsa_da: $\text{sekuentzia}(T) \rightarrow \text{Bool}$

$_ \in _ : T \times \text{sekuentzia}(T) \rightarrow \text{Bool}$

$_ @ _ : \text{sekuentzia}(T) \times \text{sekuentzia}(T) \rightarrow \text{sekuentzia}(T)$

} eraikitzaile aratzak

Sekuentzien espezifikazio ekuazionala

ekuazioak

- (1) $\text{lehena}(\langle \rangle) = \text{errorea}$
- (2) $\text{lehena}(x \bullet s) = x$
- (3) $\text{hondarra}(\langle \rangle) = \text{errorea}$
- (4) $\text{hondarra}(x \bullet s) = s$
- (5) $\text{hutsa_da}(\langle \rangle) = \text{True}$
- (6) $\text{hutsa_da}(x \bullet s) = \text{False}$
- (7) $y \in \langle \rangle = \text{False}$
- (8) $y \in (x \bullet s) = (y = x \vee y \in s)$
- (9) $\langle \rangle @ s2 = s2$
- (10) $(x \bullet s1) @ s2 = x \bullet (s1 @ s2)$

Sekuentzien espezifikazio ekuazionala (II)

mota Nat (eraikitzaile aratzak “zero” eta “hur”)

eragiketak $_+ _ : \text{Nat} \times \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$

ekuazioak

$$(1) \text{zero} + y = y$$

$$(2) \text{hur}(x) + y = \text{hur}(x+y)$$

mota sekuentzia(T)

lag Nat

eragiketak

luz: sekuentzia(T) \rightarrow Nat

ekuazioak

$$(1) \text{luz}(\langle \rangle) = 0$$

$$(2) \text{luz}(x \bullet s) = 1 + \text{luz}(s)$$

zero

hur(zero)

Hemendik aurrera Nat DMA definituta dagoela suposatuko dugu, ohikoak diren eragiketekin: +, *, -, /, mod, ... hurⁱ(zero) terminoa i jarriz adieraziko dugu.

Pilen espezifikazio ekuazionala (I)

mota **Pila(T)**

lag Bool

eragiketak

pilahutsa: \rightarrow Pila(T)

pilaratu: Pila(T) x T \rightarrow Pila(T)

gailurrekoa: Pila(T) \rightarrow T

despilatu: Pila(T) \rightarrow Pila(T)

hutsa_da: Pila(T) \rightarrow Bool

} eraikitzaile aratzak

ekuazioak

(1) gailurrekoa(pilahutsa) = errorea

(2) gailurrekoa(pilaratu(p,x)) = x

(3) despilatu(pilahutsa) = errorea

(4) despilatu(pilaratu(p,x)) = p

(5) hutsa_da(pilahutsa) = True

(6) hutsa_da(pilaratu(p,x)) = False

Pilen espezifikazio ekuazionala (II)

mota pila(T)

lag Nat

eragiketak

altuera: pila(T) \rightarrow Nat

ekuazioak

$$(1) \text{altuera}(\text{pilahutsa}) = 0$$

$$(2) \text{altuera}(\text{pilaratu}(p, x)) = 1 + \text{altuera}(p)$$

Arbola bitarren espezifikazio ekuazionala (I)

mota Arbit(T)

lag Bool

eragiketak

Hutsa: \rightarrow Arbit(T)

Errotu: $T \times$ Arbit(T) \times Arbit(T) \rightarrow Arbit(T)

Erroa: Arbit(T) \rightarrow T

Ezker, Eskuin: Arbit(T) \rightarrow Arbit(T)

Hutsa_Da: Arbit(T) \rightarrow bool

ekuazioak

(1) Erroa(Hutsa) = errorea

(2) Erroa(Errotu(e,Ezk,Esk)) = e

(3) Ezker(Hutsa) = errorea

(4) Ezker(Errotu(e,Ezk,Esk)) = Ezk

(5) Eskuin(Hutsa) = errorea

(6) Eskuin(Errotu(e,Ezk,Esk)) = Esk

(7) Hutsa_Da(Hutsa) = True

(8) Hutsa_Da(Errotu(e,Ezk,Esk)) = False

Arbola bitarren espezifikazio ekuazionala (II)

mota Arbit(T)

lag Nat

eragiketak

Sakon: Arbit(T) \rightarrow Nat

Nodok: Arbit(T) \rightarrow Nat

ekuazioak

$$(1) \text{ Sakon(Hutsa)} = 0$$

$$(2) \text{ Sakon(Errotu}(e, E_{zk}, E_{sk})) = 1 + \max(\text{Sakon}(E_{zk}), \text{Sakon}(E_{sk}))$$

$$(3) \text{ Nodok(Hutsa)} = 0$$

$$(4) \text{ Nodok(Errotu}(e, E_{zk}, E_{sk})) = 1 + \text{Nodok}(E_{zk}) + \text{Nodok}(E_{sk})$$

Arbola bitarren pila

mota Pila(Arbit(T))

lag Nat

eragiketak

Sakonmax: Pila(Arbit(T)) \rightarrow Nat

ekuazioak

$$(1) \text{ Sakonmax}(\text{pilahutsa}) = 0$$

$$(2) \text{ Sakonmax}(\text{pilaratu}(p,a)) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sakon}(a), & \text{baldin } \text{Sakon}(a) \geq \text{Sakonmax}(p) \\ \text{Sakonmax}(p), & \text{bestela} \end{array} \right.$$

Dedukzio ekuazionala

DMA bateko ekuazioetan oinarrituta

- espresioak sinplifikatzen ahal dira
- propietateak frogatzen ahal dira (beste ekuazioak deduzitu)

Sinplifikazio adibidea:

$$\text{altuera}(\text{despilatu}(\text{pilaratu}(\text{pilaratu}(\text{pilahutsa}, y), x))) =$$

$$\text{altuera}(\text{pilaratu}(\text{pilahutsa}, y)) =$$

$$1 + \text{altuera}(\text{pilahutsa}) =$$

$$1 + 0 =$$

$$1$$

Dedukzio bidezko frogapenak. Adibidea.

Frogatu nahi dena: Edozein P pilatarako, P hutsa ez bada, orduan **$P = \text{pilaratu}(\text{despilatu}(P), \text{gailurrekoa}(P))$**

Frogapena:

P hutsa ez bada, orduan $P = \text{pilaratu}(K, x)$, non $K \in \text{Pila}(T)$ eta $x \in T$.

Beraz:

$$\begin{aligned} & \text{pilaratu}(\text{despilatu}(P), \text{gailurrekoa}(P)) = \\ & \text{pilaratu}(\text{despilatu}(\text{pilaratu}(K, x)), \text{gailurrekoa}(\text{pilaratu}(K, x))) = \\ & \text{pilaratu}(\text{despilatu}(\text{pilaratu}(K, x)), x) = \\ & \text{pilaratu}(K, x) = P \end{aligned}$$

Indukzio bidezko frogapenak

Indukzio bidezko frogapenak motaren eraikitzaileen gainean egiten dira

- *piletarako*: pilahutsa eta pilaratu
- *sekuentziatarako*: $\langle \rangle$ eta $_ \bullet _$
- *arbola bitarretarako*: Hutsa eta Errotu

Adibidea:

- Edozein S1 eta S2 sekuentziatarako,
$$\text{luz}(S1@S2) = \text{luz}(S1) + \text{luz}(S2)$$

Ariketa:

- Edozein S1 eta S2 sekuentziatarako,
$$x \in (S1@S2) = x \in S1 \vee x \in S2$$

Indukzio bidezko frogapenak. Adibidea.

Frogatu nahi dena: Edozein $S1$ eta $s2$ sekuentziatarako,

$$\text{luz}(S1@S2) = \text{luz}(S1) + \text{luz}(S2)$$

($S1$ sekuentziaren gaineko indukzioz)

- Oinarrizko kasua: $S1 = \langle \rangle$

$$\text{luz}(S1@S2) = \text{luz}(\langle \rangle@S2) = \text{luz}(S2) =$$

$$0 + \text{luz}(S2) = \text{luz}(\langle \rangle) + \text{luz}(S2) = \text{luz}(S1) + \text{luz}(S2)$$

- Indukzio-kasua: $S1 = x \bullet S$, non $x \in T$ eta $S \in \text{Sekuentzia}(T)$

$$\text{luz}((x \bullet S)@S2)$$

$$= \text{luz}(x \bullet (S@S2))$$

$$= 1 + \text{luz}(S@S2)$$

$$= 1 + (\text{luz}(S) + \text{luz}(S2))$$

$$= (1 + \text{luz}(S)) + \text{luz}(S2)$$

$$= \text{luz}((x \bullet s)) + \text{luz}(s2)$$

Indukzio-hipotesia:

S sekuentziak betetzen du frogatu nahi dena