Soluciones a los problemas de análisis de sensibilidad

1. 1.1 Soluciones óptimas para los cambios propuestos.

   a) $x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad z^* = 10.$

   b) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad z^* = 18.$

   c) $x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 3, \quad z^* = 18.$

   d) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad z^* = 24.$

   e) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad z^* = 18.$

   f) Soluciones óptimas múltiples. $z^* = 18$ y

   $$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad , x_3^* = 2,$$

   $$x_1^* = \frac{8}{3}, \quad x_2^* = \frac{2}{3}, \quad , x_3^* = \frac{4}{3}.$$

   g) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1, \quad z^* = 19.$

   h) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad x_4^* = 0, \quad z^* = 18.$

   i) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2, \quad z^* = 18.$

   j) $x_1^* = \frac{1}{2}, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 3, \quad z^* = 17.$

   1.2 Precios sombra.

   - Pecurso b_1.

   $$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

   Si $b_1 = 4$ cambia a $b_1 = 5$ el valor óptimo del objetivo aumenta el precio sombra, $y_1^* = 2$. Es decir, $\hat{z} = z + y_1^* = 18 + 2 = 20.$

   - Recurso b_2.

   $$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

   Si $b_2 = 10$ cambia a $b_1 = 11$ el valor óptimo del objetivo aumenta el precio sombra, $y_2^* = 1$. Es decir, $\hat{z} = z + y_2^* = 18 + 1 = 19.$

   - Recurso b_3.

   $$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Si $b_3 = 16$ cambia a $b_1 = 17$ el valor óptimo del objetivo dismunuye el precio sombra, $y_3^* = 0$. Es decir, $\hat{z} = z + y_3^* = 18 + 0 = 18$.

1.3 Recorrido de cada componente del vector $\mathbf{c}$:

$$\frac{10}{3} \leq c_1 \leq 5, \qquad c_2 \leq 3, \qquad 4 \leq c_3 \leq 6.$$

Recorrido de cada componente del vector $\mathbf{b}$:

$$\frac{10}{3} \leq b_1 \leq 5, \qquad 8 \leq b_2 \leq 12, \qquad b_3 \geq 14.$$

2. 2.1 Soluciones óptimas para los cambios propuestos.

a) $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 26.$

b) $x_1^* = 8, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1, \quad z^* = 37.$

c) $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 38.$

d) $x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{8}{3}, \quad x_3^* = \frac{5}{3}, \quad z^* = 31.$

e) $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 26.$

f) $x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 5, \quad z^* = 31.$

g) $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0, \quad z^* = 26.$

h) $x_1^* = 6, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 3, \quad z^* = 39.$

i) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2, \quad x_3^* = 1, \quad z^* = 25.$

j) $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 26.$

2.2 Precios sombra.

- Recurso b_1.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Si $b_1 = 12$ cambia a $b_1 = 13$ el valor óptimo del objetivo aumenta el precio sombra, $y_1^* = 0$. Es decir, $\hat{z} = z + y_1^* = 26 + 0 = 26$.

- Recurso b_2.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Si $b_2 = 14$ cambia a $b_1 = 15$ el valor óptimo del objetivo aumenta el precio sombra, $y_2^* = 1$. Es decir, $\hat{z} = z + y_2^* = 26 + 1 = 27$.

- Recurso b_3.

$$\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Si $b_3 = 6$ cambia a $b_1 = 7$ el valor óptimo del objetivo aumenta el precio sombra, $y_3^* = 2$. Es decir, $\stackrel{\wedge}{z}= z + y_3^* = 26 + 2 = 28$.

2.3 Recorrido de cada componente del vector $\mathbf{c}$:

$$\frac{11}{3} \leq c_1 \leq 6, \qquad 4 \leq c_2 \leq 7, \qquad c_3 \leq 6.$$

Recorrido de cada componente del vector $\mathbf{b}$:

$$b_1 \geq 7, \qquad 12 \leq b_2 \leq 24, \qquad \frac{7}{2} \leq b_3 \leq 7.$$

3. 3.1 Para los libros de tipo L_1 trabajarán 8 equipos, $x_1^* = 8$; en los de tipo L_2 trabajarán 4 equipos, $x_2^* = 4$; en los de tipo L_3 2 equipos, $x_3^* = 2$. Número total de equipos $z^* = 14$.

   3.2 La solución óptima, $x_1^* = 8$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 2$, satisface todas las restricciones con igualdad. Todos/as los expertos/as serán contratados/as.

   3.3 Para los libros de tipo L_1 trabajarán 10 equipos, $x_1^* = 10$; en los de tipo L_2 trabajarán 5 equipos, $x_2^* = 5$; en los de tipo L_3 ningún equipo, $x_3^* = 0$. Número total de equipos $z^* = 15$.

4. 4.1
   - Pintura roja. Precio sombra de b_1.

$$\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix} 27 \\ 14 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}}= \geq \mathbf{0}.$$

   Podemos decir que el precio sombra del recurso b_1 es $y_1^* = 0$; ésto quiere decir que comprando 1 kg. más de pintura roja el valor de función objetivo no mejora, $\stackrel{\wedge}{z}= z + y_1^* = 224 + 0 = 224$.
   La variable de holgura de la primera restricción es positiva, por tanto, hay pintura roja sobrante.

   - Pintura azul. Precio sombra de b_2.

$$\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix} 26 \\ 15 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\stackrel{\wedge}{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}.$$

Podemos decir que el precio sombra del recurso b_2 es $y_2^* = 16$; ésto quiere decir que comprando 1 kg más de pintura azul mejora el valor de la función objetivo, $\hat{z} = z + y_2^* = 224 + 16 = 240$. La variable de holgura de la segunda ecuación es cero. Para aumentar el beneficio se necesita más pintura azul.

- Pintura amarilla. Precio sombra de b_3.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\overset{\wedge}{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}.$$

Podemos decir que el precio sombra del recurso b_3 es $y_3^* = 0$, lo que quiere decir que comprando 1 kg más de pintura amarilla no mejora el objetivo, $\hat{z} = z + y_3^* = 224 + 0 = 224$.
La variable de holgura de la tercera restricción es positiva, por tanto, hay pintura amarilla sobrante.

4.2 Como máximo se pueden comprar $\frac{52}{3}$ kg.

4.3 Nueva solución óptima:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 48, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 20, \quad z^* = 312.$$