Problemas de programación entera

1. Resolver gráficamente los siguientes modelos lineales enteros.

1.1
$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 36 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

2. Considerar los siguientes modelos lineales y la tabla óptima del correspondiente modelo relajado.

2.1 Calcular la solución óptima utilizando el algoritmo de ramificación y acotación. En la primera ramificación acotar la variable x_1.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{2}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$

2.2 Calcular la solución óptima utilizando el algoritmo de ramificación y acotación. En la primera ramificación acotar la variable x_1.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 36 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{512}{5}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{5}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{76}{5}$

2.3 Calcular la solución óptima utilizando el algoritmo de ramificación y acotación.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	$\frac{5}{2}$	2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{33}{2}$
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{7}{2}$	-2	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	$\frac{3}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$

2.4 Calcular la solución óptima utilizando el algoritmo de ramificación y acotación. En cada ramificación elegir para acotar la variable de menor índice.

$$\max\ z = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 42$$
$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 52$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y enteras}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	$\frac{1}{19}$	0	$\frac{3}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{230}{19}$
$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{11}{19}$	0	$\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	$\frac{54}{19}$
$\mathbf{a}_3$	0	$\frac{31}{19}$	1	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{176}{19}$

3. Calcular la solución óptima de los siguientes modelos lineales utilizando el algoritmo de ramificación y acotación 0-1.

3.1 $\max\ z = 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ ó } 1$$

3.2 $\max\ z = 9x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5$

sujeto a

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 7$$
$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ ó } 1$$

3.3 $\max\ z = 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5$

sujeto a

$$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 14$$
$$6x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_5 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ ó } 1$$

3.4 $\max\ z = -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 6x_6$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \leq 11$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 4x_6 \leq 19$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ ó } 1$$

3.5 max $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$

sujeto a

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ó } 1$$

4. Supongamos que se tienen 6 piezas, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, para meter en una caja de capacidad 15 kg. El peso de cada pieza y el valor vienen dados en la siguiente tabla.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Valor (euros)	4	2	1	7	3	6
Peso (kg.)	5	8	8	6	1	5

En la caja hay que meter al menos 3 piezas con el objetivo es maximizar el valor de la caja. Para determinar qué piezas hay que meter en la caja definimos las variables de decisión para $j = 1, \ldots, 6$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } j \text{ es seleccionada} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El modelo lineal para representar el problema es el siguiente.

$$\max\ z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$$

sujeto a

$$5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ ó } 1$$

Resolver utilizando el algoritmo de ramificación y acotación 0-1.