Problemas de análisis de sensibilidad

1. Considerar el siguiente modelo lineal y la tabla óptima

$$\begin{aligned} \max\ z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 16 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	2	0	2	1	0	18
$\mathbf{a}_1$	1	2	0	3	-1	0	2
$\mathbf{a}_3$	0	-1	1	-2	1	0	2
$\mathbf{a}_6$	0	-1	0	-1	-1	1	2

1.1 Analizar el efecto de los siguientes cambios discretos en la tabla óptima del modelo. Calcular en cada caso la solución óptima del nuevo modelo.

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{c}^T = (4 \ \ 1 \ \ 5) \rightarrow \hat{\mathbf{c}}^T = (3 \ \ 3 \ \ 5)$

d) $\mathbf{c}^T = (4 \ \ 1 \ \ 5) \rightarrow \hat{\mathbf{c}}^T = (5 \ \ 1 \ \ 7)$

e) $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

g) Nueva variable: x_4 $\quad c_4 = 6 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

h) Nueva variable: x_4 $\quad c_4 = 3 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

i) Nueva restricción: $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8$

j) Nueva restricción: $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$

1.2 Calcular los precios sombra.

1.3 Calcular el recorrido de cada componente del vector **c** y del vector **b** manteniendo el resto de componentes constantes para que la tabla óptima dada no pierda la optimalidad.

2. Considerar el siguiente modelo lineal y la tabla óptima

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 14 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	0	1	0	1	2	26
$\mathbf{a}_4$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	5
$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-1	1
$\mathbf{a}_1$	1	0	3	0	$-\frac{1}{2}$	2	5

2.1 Analizar el efecto de los siguientes cambios discretos en la tabla óptima. Calcular en cada caso la solución óptima del nuevo modelo.

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \stackrel{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \stackrel{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{c}^T = (4 \;\; 6 \;\; 5) \rightarrow \stackrel{\wedge}{\mathbf{c}}^T = (6 \;\; 8 \;\; 2)$

d) $\mathbf{c}^T = (4 \;\; 6 \;\; 5) \rightarrow \stackrel{\wedge}{\mathbf{c}}^T = (4 \;\; 6 \;\; 9)$

e) $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \stackrel{\wedge}{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) Nueva variable: x_4 $\quad c_4 = 2 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

h) Nueva variable: x_4 $\quad c_4 = 5 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i) Nueva restricción: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

j) Nueva restricción: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$

2.2 Calcular los precios sombra.

2.3 Calcular el recorrido de cada componente del vector **c** y del vector **b** manteniendo el resto constante para que la tabla óptima dada no pierda la optimalidad.

3. Una editorial quiere editar 3 tipos de libros de cocina, L_1, L_2 y L_3. Para ello cuenta con 40 expertos/as en elaboración de menús diarios, 20 expertos/as en postres y 10 expertos/as en pinchos. Para el diseño de los libros forma tres tipos de equipos: el Equipo 1 para el diseño de libros L_1, el Equipo 2 para el diseño de libros L_2 y el Equipo 3 para el diseño de libros L_3. La composición de los equipos se da en la siguiente tabla.

Equipos	expertos/as en menú diario	expertos/as en postres	expertos/as en pinchos
Equipo 1	2	2	1
Equipo 2	4	1	0
Equipo 3	4	0	1
Total	40	20	10

El precio en el mercado es el mismo para los libros L_1, L_2 y L_3.

Cada equipo de tipo j diseña un libro de tipo j, $j = 1, 2, 3$.

Si definimos x_j : número de equipos de tipo j, $j = 1, 2, 3$, que se pueden formar, podemos plantear el siguiente modelo para determinar el número óptimo de equipos de cada tipo. Sumando una variable de holgura en cada restricción y resolviendo el modelo se obtiene la tabla óptima que se da junto al modelo.

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 + x_3 & \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad &\leq 20 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	14
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	2

3.1 Analizando el modelo lineal y la tabla óptima, ¿cúantos equipos se pueden formar con los expertos/as disponibles? ¿Cuántos libros de cada tipo de publican?

3.2 ¿Hay algún/una experto/a que no participe en ninguno de los equipos?

3.3 Si la editorial contara con 30 expertos/as en postres ¿cuántos equipos podría formar?

4. En una fábrica se compran 26 kg de pintura roja, 14 kg de pintura azul y 32 kg de pintura amarilla para producir los colores C_1, C_2, C_3 y C_4 que están de moda actualmente. Estos colores se producen mezclando los colores básicos. Las mezclas se hacen de la siguiente manera:

Composición 1 kg de C_1: $\frac{1}{2}$ kg roja + $\frac{1}{4}$ kg azul + $\frac{1}{4}$ kg amarilla

Composición 1 kg de C_2: $\frac{3}{8}$ kg roja + $\frac{1}{4}$ kg azul + $\frac{3}{8}$ kg amarilla

Composición 1 kg de C_3: $\frac{1}{3}$ kg roja + $\frac{1}{3}$ kg azul + $\frac{1}{3}$ kg amarilla

Composición 1 kg de C_4: $\frac{3}{10}$ kg roja + $\frac{2}{5}$ kg azul + $\frac{3}{10}$ kg amarilla

El/la responsable de la empresa sabe que el beneficio de un kg de pintura C_1, C_2, C_3 y C_4 es 3, 4, 1 y 6 unidades monetarias, respectivamente, para cada uno de los colores. Lo que no conoce es qué cantidad de cada color, C_1, C_2, C_3 y C_4, le conviene producir. Para ello plantea un modelo lineal cuya solución óptima le permita tomar las decisiones que le proporcionen el máximo beneficio.

$$\begin{aligned} \max\ z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 & \\ \text{sujeto a} & \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{3}{10}x_4 &\leq 26 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{2}{5}x_4 &\leq 14 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{3}{10}x_4 &\leq 32 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	1	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{2}{5}$	0	16	0	224
$\mathbf{a}_5$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	5
$\mathbf{a}_2$	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	0	4	0	56
$\mathbf{a}_7$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	11

4.1 Analizando la solución de la tabla, ¿se puede decir que el/la responsable de la empresa compra los colores básicos en cantidades adecuadas? Calcular el precio sombra de cada recurso.

4.2 El/La responsable sospecha que compra poca pintura azul. ¿Qué cantidad de pintura azul puede comprar como máximo sin tener que calcular una nueva tabla?

4.3 Suponer que se compra más pintura azul y menos pintura roja y amarilla, en las siguientes cantidades

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \\ 32 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 31 \end{pmatrix}$$

¿Qué cantidades de pintura C_1, C_2, C_3 y C_4 conviene producir para obtener el máximo beneficio?