Problemas del método simplex

1. Escribir los siguientes modelos en forma estándar de maximización.

1.1
$$\begin{aligned} \max\ z = 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ 4x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 : \text{no restringida} \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} \min\ z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 \geq 8 \\ x_1 - 4x_2 \leq -12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} \min\ z = 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 \leq -10 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1.4
$$\begin{aligned} \max\ z = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} \\ x_2 - x_3 \leq -9 \\ -x_1 - 2x_3 \geq 5 \\ 4x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 : \text{no restrigida} \end{aligned}$$

2. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1 Resolver el modelo gráficamente.

2.2 Calcular todas las soluciones básicas. Decir cuáles son factibles y cuáles son degeneradas.

2.3 ¿Qué punto extremo le corresponde a cada solución factible básica?

3. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   Escribir el modelo en forma estándar de maximización y calcular la solución básica asociada a la base $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_6)$. Aplicar el teorema de mejora para calcular la solución óptima.

4. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 \qquad + x_3 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   y la inversa de la matriz $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que la solución básica asociada a esa base es óptima. Calcular dicha solución y el valor de la función objetivo.

5. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   Suponer que en una iteración del algoritmo simplex se tiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	0		0	2	0	
$\mathbf{a}_4$	2	0		1	-2	0	
$\mathbf{a}_2$	2	1		0	$\frac{1}{2}$	0	
$\mathbf{a}_6$	1	0		0	-1	1	

5.1 Comprobar que hay un error de cálculo en la columna $\mathbf{y}_1$.

5.2 Comprobar que en la columna $\mathbf{y}_5$ no hay errores de cálculo.

5.3 Utilizando la información de la tabla calcular $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{y}_3$ y $z_3 - c_3$.

6. Calcular utilizando el algoritmo simplex la solución óptima de los siguientes modelos lineales. Para los modelos que tengan solución señalar en la solución gráfica los puntos extremos recorridos por el algoritmo hasta llegar a la solución óptima.

6.1 $\max \ z = x_1 - x_2$

sujeto a

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

6.2 $\max \ z = x_1 + x_2$

sujeto a

$$x_1 + 6x_2 \geq 6$$
$$2x_1 - 3x_2 \geq -6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

7. Calcular utilizando el algoritmo simplex la solución óptima para los siguientes modelos lineales.

7.1 $\max \ z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

sujeto a

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7.2 $\min \ z = 5x_1 - x_2 - 2x_3$

sujeto a

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$x_1 \leq 0, , x_2, x_3 \geq 0$$

7.3 $\min\ z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

sujeto a

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 9$

$-2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 14$

$-4x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

7.4 $\min\ z = 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4$

sujeto a

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10$

$-4x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 12$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

7.5 $\min\ z = -16x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5$

sujeto a

$3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 \leq 12$

$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

7.6 $\max\ z = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4$

sujeto a

$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2$

$8x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \geq 10$

$4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

7.7 $\min\ z = -4x_1 + 2x_2 - x_3$

sujeto a

$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8$

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$: no restringida

7.8 $\min\ z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5$

sujeto a

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 12$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$