A. Eranskina

Aljebra lineala eta multzo ganbilak

Ikerkuntza Operatiboaren gaien garapenean beharrezkoak diren aljebra linealaren eta multzo ganbilen kontzeptuak gogoratuko ditugu eranskin honetan. Eredu linealak ebazteko erabiltzen den simplex algoritmoa prozedura aljebraikoa den arren, programazio linealaren geometria aztertzea garrantzitsua da. Hasteko, eredu linealaren soluzio optimoa non aurkitzen den ikusten lagunduko diguten oinarrizko ideia geometriko batzuk aztertuko ditugu. Ondoren, mutzo ganbil baten mutur-puntuen eta eredu linealaren oinarriko soluzioen arteko erlazioa aztertuko dugu.

A.1 Matrizeak eta bektoreak

Har dezagun $\mathbb{R}$ gorputza. $\mathbb{R}$-ko elementuei eskalar deitzen zaie. m errenkadako eta n zutabeko eskalarren taulari matrize esaten zaio.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizea $m \times n$ tamainakoa edo dimentsiokoa dela esaten da. $\mathbf{A} = (a_{ij})$ notazioa ere erabil dezakegu.

Zutabe bakarra duen matrizea, hau da, $m \times 1$ tamainakoa, zutabe-bektoretzat har daiteke.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Adibidea.

1. Eskalarren taula hau 3×4 tamainako matrizea da.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 7 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eskalarren taula hau 3 dimentsioko bektorea da.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

A.1.1 Matrize-eragiketak

Batuketa

$m \times n$ tamainako bi matrize izanik, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{A}$-ko eta $\mathbf{B}$-ko elementuak elementuz elementu batuz lortzen den $m \times n$ tamainako $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizeari $\mathbf{A}$ eta $\mathbf{B}$ matrizeen arteko *batura* esaten zaio eta $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ moduan adierazten da.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Bi matrizeren arteko batuketa kalkulatu ahal izateko bi matrizeek tamaina berekoak izan behar dute, eta batuketa egin ondoren lortutako beste matrizea ere tamaina berekoa izango da.

Matrizeen arteko batuketa definitzen den modu berean definitzen da bektoreen arteko batuketa; bektore bat zutabe bakarreko matrize bat dela besterik ez da kontuan izan behar.

Adibidea.

1. $\mathbf{a}$ eta $\mathbf{b}$ bektoreen batuketa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{A}$ eta $\mathbf{B}$ matrizeen batuketa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\square$

Propietateak

1. Matrizeen arteko batuketa barne-eragiketa bat da $\mathbb{R}^{m\times n}$ espazioan.

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2. Matrizeen arteko batuketa trukakorra da.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

3. Matrizeen arteko batuketa elkarkorra da.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

4. Matrizeen arteko batuketak elementu neutroa dauka, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

5. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrize orok badu aurkakoa: $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Bektoreen arteko batuketak matrizeen arteko batuketak betetzen dituen propietate berberak betetzen ditu.

Matrizeen eta eskalarren arteko biderketa

Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R}$ eskalarra eta $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea. α eta $\mathbf{A}$ arteko *biderketa* $\mathbf{A}$ matrizearen elementu guztiak α eskalarraz biderkatuz kalkulatzen da. Biderketa $\alpha \cdot \mathbf{A}$ notazioaz adierazten da eta biderketaren emaitza $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea da.

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Matrizeen eta eskalarren arteko biderketaren emaitza tamaina bereko beste matrize bat da.

Adibidea.

1. $\mathbf{A}$ matrizearen eta α eskalarraren arteko biderketa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = -2, \quad \alpha \cdot \mathbf{A} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{a}$ bektorearen eta α eskalarraren arteko biderketa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$\square$

Bektoreen biderkaketa eskalarra

$\mathbf{a}^T$ errenkada-bektorearen eta $\mathbf{b}$ zutabe-bektorearen arteko *biderkadura eskalarra* $\mathbf{a}^T$ bektoreko elementu bakoitza $\mathbf{b}$ bektorean dagokion elementuarekin biderkatuz eta emaitzak batuz kalkulatzen da. Biderkadura eskalarra $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ notazioaz adierazten da eta emaitza eskalar bat da.

$$\mathbf{a}^T = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (a_1 \ \cdots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i.$$

Errenkada-bektore baten eta zutabe-bektore baten arteko biderkadura eskalarra kalkulatu ahal izateko, beharrezkoa da biak dimentsio berekoak izatea. Biderkaduraren emaitza eskalarra da.

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ eta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (4 \ 2 \ 7) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Matrizeen arteko biderketa

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eta $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ matrizeak izanik, $\mathbf{A}$ eta $\mathbf{B}$ matrizeen arteko biderkadura $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrizea da.

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matrizeko (i, j) elementua, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$, $\mathbf{A}$ matrizeko i. errenkadaren eta $\mathbf{B}$ matrizeko j. zutabearen arteko biderkadura da (errenkada bider zutabe).

Adibidea. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ eta $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ matrizeen biderkadura kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -21 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

□

Propietateak

1. Matrizeen arteko biderketa elkarkorra da.

$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p})\ (\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}) \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

2. Matrizeen arteko biderketa banakorra da batuketarekiko.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}.$$

$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

3. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}, \quad \mathbf{0}_{q\times m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}_{q\times n}.$

4. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$

5. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B}).$

A.1.2 Matrize baten heina

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea izanik, errenkaden arteko oinarrizko eragiketen bidez $\mathbf{A}$ matrizea $\mathbf{U}$ matrize mailakatuan eralda daiteke Gaussen ezabapena erabiliz. $\mathbf{U}$ matrizean pibotik ez duten errenkadak nuluak direnez, matrizeak duen pibot kopurua errenkada ez-nulu kopurua da.

Adibidea. Har dezagun matrize hau:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Gaussen ezabapena erabiliz, $\mathbf{U}$ matrize mailakatua lortuko da.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

□

A.1.1 Definizioa. *Izan bitez* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *matrizea, eta Gaussen ezabapena erabiliz lortutako* $\mathbf{U}$ *matrize mailakatua.* $\mathbf{U}$ *matrizearen pibot kopurua (errenkada ez-nuluen kopurua)* $\mathbf{A}$ *matrizearen* heina *dela esango dugu, eta rang* $\mathbf{A}$ *notazioaz adieraziko dugu.*

Aurreko adibideko $\mathbf{A}$ matrizearen heina 4 da, $\mathbf{U}$ matrizearen pibot kopuruaren edo errenkada ez-nuluen kopuruaren berdina.

A.2 Ekuazio linealen sistemen ebazpena

Izan bedi m ekuazio eta n ezezagun dituen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

ekuazio-sistema, non $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, rang $\mathbf{A} = r$ eta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ baitira. Gaussen ezabapena erabiliko dugu sistema ebazteko. Kasu hauek gerta daitezke:

* rang $\mathbf{A} \neq$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$ bada, sistemak ez du soluziorik; bateraezina da.
* rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = r$ bada, sistemak badu soluziorik.
    * $r =$ ezezagun kopurua bada, sistemak soluzio bakarra dauka.
    * $r <$ ezezagun kopurua bada, sistemak infinitu soluzio ditu.

Adibidea. Har dezagun ekuazio linealen sistema hau:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Sistemak soluziorik duen edo ez erabakitzeko, $\mathbf{A}$ eta $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$ matrizeen heinak kalkulatu behar dira.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Gaussen ezabapena eginez,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A} = 2 < 3 =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$ betetzen denez, sistemak ez du soluziorik. □

Adibidea. Har dezagun ekuazio linealen sistema hau:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Gaussen ezabapena eginez,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A} = \text{rang}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 =$ ezezagun kopurua betetzen denez, sistemak soluzio bakarra dauka: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. □

Adibidea. Har dezagun ekuazio linealen sistema hau:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Gaussen ezabapena eginez,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A} = \text{rang}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 <$ ezezagun kopurua betetzen denez, sistemak infinitu soluzio ditu.

Oinarriko ezezaguntzat x_1 eta x_2 hartzen baditugu, ekuazio-sistema horrela idatz daiteke,

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 \\ \frac{3}{2}x_2 &= 3 + \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

eta sistemaren infinitu soluzioak $x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3$ eta $x_2 = 2 + \frac{5}{3}x_3$ dira, $x_3 \in \mathbb{R}$ ezezagun askearen mende. □

A.2.1 Oinarriko soluzioak

Har dezagun $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekuazio-sistema, non $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ den, $m < n$ izanik, eta rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = m$ betetzen den. Zutabe guztiak linealki independenteak dituen $m \times m$ tamainako $\mathbf{B}$ azpimatrize bat aukeratzen badugu eta $\mathbf{A}$ matrizearen gainerako zutabeek osatzen duten azpimatrizeari $\mathbf{N}$ deitzen badiogu, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekuazio-sistema honela idatz dezakegu:

$$(\mathbf{B}\ \ \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

edo baita honela ere:

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

Aurreko formulan askatuz, $\mathbf{B}$ matrizeari dagozkion aldagaiak (oinarriko aldagaiak) $\mathbf{N}$ matrizeari dagozkion aldagaien (aldagai askeen) mende adieraztea lortzen da:

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} - \mathbf{Nx}_N.$$

$\mathbf{x}_N$ bektoreko aldagai askeen balioen arabera, infinitu soluzio existitzen dira. Aldagai aske guztiei zero balioa emanez, hau da, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ eginez, soluzio bakarra duen sistema hau lortzen da:

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}.$$

Soluzio horri *oinarriko soluzio* deitzen zaio.

Adibidea. Har dezagun ekuazio linealen sistema hau:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

235. orrialdeko adibidean ekuazio-sistema hori Gaussen ezabapena erabiliz beste ekuazio-sistema bat bihurtu dugu:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 \\ \frac{3}{2}x_2 &= 3 + \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

Ikusi dugun bezala, sistemak infinitu soluzio ditu x_3 aldagai askearen funtzioan: $x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3$ eta $x_2 = 2 + \frac{5}{3}x_3$. Horien artetik oinarriko soluzioa kalkulatzeko, $x_3 = 0$ egin behar da: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

$\mathbf{A}$ matrizean $\mathbf{B}$ oinarri-azpimatrize desberdinak aukera daitezke, eta horietako bakoitzerako oinarriko soluzio bat kalkulatu, oinarriari ez dagokion aldagai askeari zero balioa emanez. Egon daitekeen oinarri kopuru maximoa hau da:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

236. orrialdeko adibiderako, sistemak duen oinarriko soluzio kopuru maximoa hau da:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

□

A.3 Bektore-espazioak

Bektore-espazioetako kontzeptu batzuk gogoratzeko, $\mathbb{R}^m$ bektore-espazioa hartuko dugu.

A.3.1 Definizioa. (Konbinazio lineala) *Izan bitez $\mathbb{R}^m$ bektore-espazioko $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ bektoreak eta $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eskalarrak.*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

moduko adierazpenari bektoreen arteko konbinazio lineala *esaten zaio.*

Adibidea. Har ditzagun bi bektore hauek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Adierazpen hau $\mathbf{v}_1$ eta $\mathbf{v}_2$ bektoreen arteko konbinazio lineal bat da:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Adierazpen honek $\mathbf{v}_1$ eta $\mathbf{v}_2$ bektoreen arteko konbinazio lineal guztiak ematen dizkigu, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ izanik:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

A.3.1 Mendekotasun eta independentzia lineala

A.3.2 Definizioa. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ *bektoreak* linealki independenteak *dira baldin* $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ *konbinazio lineala bete dadin, aukera bakarra eskalar guztiak zero izatea bada,* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$*.*

A.3.3 Definizioa. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ *bektoreak* linealki mendekoak *direla esaten da baldin* $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ *konbinazio lineala aurki badaiteke, gutxienez* α_i *eskalar bat zeroren desberdina izanik.*

Adibidea.

1. Har ditzagun $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ bektore hauek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bi bektoreen konbinazio lineala zero egiten duten α_1, α_2 eskalarrak existitzen direnez, guztiak batera zero ez izanik, $\mathbf{v}_1$ eta $\mathbf{v}_2$ bektoreak linealki mendekoak dira.

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Har ditzagun $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bektore hauek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Azter dezagun hiru bektoreen konbinazio lineala zero izateko zein balio har ditzaketen α_1, α_2 eta α_3 eskalarrek.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussen ezabapena aplikatuz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrize horrek hiru pibot dituenez, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ da ekuazio-sistemaren soluzio bakarra. Ondorioz, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ eta $\mathbf{v}_3$ bektoreak linealki independenteak dira.

□

A.3.2 Oinarria eta dimentsioa

A.3.4 Definizioa. $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$ *bektore-multzoa* $\mathbb{R}^m$ *espazioaren* multzo sortzailea *dela esaten da baldin* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ *bektore oro* S *multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan idatz badaiteke, hau da,* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ *eskalarrak existitzen badira, non* $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p$ *beteko den.*

Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}^3$ espazioko $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ eta $\mathbf{v}_4$ bektoreek osatzen duten S multzoa eta $\mathbb{R}^3$ espazioko edozein $\mathbf{v}$ bektore.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Azter dezagun $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\alpha_4\mathbf{v}_4=\mathbf{v}$ ekuazio-sistema eta ikus dezagun sistema betetzen duten $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$ eskalarrak existitzen direla.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

Gaussen ezabapena erabiliz,

$$\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\-1&1&1&-2&v_2\\1&0&1&2&v_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\0&4&3&0&v_2+v_1\\0&-3&-1&0&v_3-v_1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\0&4&3&0&v_2+v_1\\0&0&\frac{5}{4}&0&v_3-\frac{1}{4}v_1+\frac{3}{4}v_2\end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A}=$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})=3$ betetzen denez, sistemak badu soluziorik, eta beraz, S multzo sortzailea da. □

A.3.5 Definizioa. *Izan bedi* $B=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\}\subseteq\mathbb{R}^m$ *bektore-multzoa.* $\mathbb{R}^m$ *bektore-espazioan* B oinarria *dela esaten da baldin:*

- B *multzoko bektoreak linealki independenteak badira, eta*
- B *multzoa* $\mathbb{R}^m$ *espazioaren multzo sortzailea bada.*

Bektore-espazio batean oinarri desberdinak kalkula daitezke; baina, oinarri guztiek bektore kopuru berbera dute. Gogora dezagun bektore-espazio baten dimentsioa oinarri batean dagoen bektore kopurua dela.

Adibidea. B bektore-multzo hau $\mathbb{R}^3$ espazioan oinarria dela egiaztatuko dugu.

$$B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Hasteko, bektoreak linealki independenteak direla egiaztatuko dugu, hau da, $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ ekuazio-sistemaren soluzio bakarra $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dela.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussen ezabapena erabiliz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrize horrek hiru pibot dituenez, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ soluzioa ekuazio-sistemaren soluzio bakarra da.

B-ko bektoreek $\mathbb{R}^3$ espazioan multzo sortzailea osatzen dutela egiaztatzeko, honako sistema ebatzi behar da:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Sistema bateragarria denez, B multzo sortzailea da. Hortaz, $\mathbb{R}^3$ espazioko oinarria da.

$\square$

A.3.1 Teorema. *Izan bedi $\mathbb{R}^m$ espazioko $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ oinarria. Edozein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ bektore idatz daiteke $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ bektoreen konbinazio lineal moduan, eta konbinazio lineal horren koefizienteak bakarrak dira.*

Teoreman aipatzen den konbinazio lineal bakar horren koefizienteak $\mathbf{v}$ bektorearen koordenatuak dira B oinarrian.

A.3.2 Teorema. *$\mathbb{R}^m$ bektore-espazioko B oinarri bat eta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ bektore bat izanik, $\mathbf{v} \notin B$ eta $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, beti lor daiteke beste oinarri bat B-ko bektoreren bat $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkatuz.*

Emaitza hori garrantzia handikoa da programazio linealaren garapenean. Hain zuzen ere, simplex algoritmoa oinarriko soluzio bideragarri batetik abiatzen da eta beste hobea batera mugituko da, aurreko teoreman dioen bezala oinarriko bektore bat aldatuz. Ikus dezagun adibide baten bidez zein baldintza bete behar duen B oinarrian ordezkatua izango den bektoreak.

Adibidea. Har ditzagun 240. orrialdeko adibideko B oinarria eta $\mathbf{v}$ bektore bat:

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$ ekuazio-sistema ebatziz,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}$ bektorearen koordenatuak lortuko dira B oinarrian: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = 0$. $\alpha_1 \neq 0$ eta $\alpha_2 \neq 0$ direnez, $\mathbf{v}_1$ eta $\mathbf{v}_2$ bektoreak $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkatuak izan daitezke bi oinarri hauek lortzeko:

$$B' = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \ , \ \ B'' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\}$$

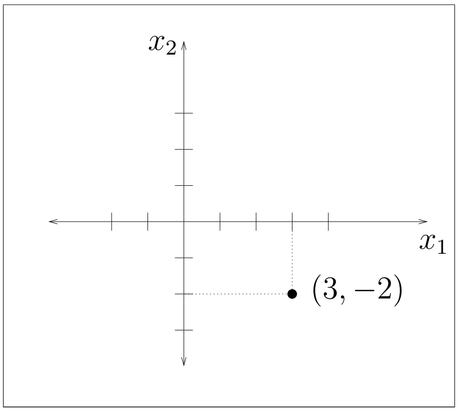
Egiazta daiteke B oinarrian $\mathbf{v}_3$ bektorea $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkatuz osatzen den bektore-multzoan mendekotasun lineala dagoela. Hori hala gertatzen da $\alpha_3 = 0$ delako. $\mathbf{v}_3$ bektorea ezin da ordezkatua izan oinarrian. $\square$

Hortaz, oinarri berriak lortzeko, $\mathbf{v}$-ren koordenatu ez-nuluei dagozkien B oinarriko bektoreak izan daitezke ordezkatuak $\mathbf{v}$ bektoreaz.

A.4 Multzo ganbilak

Plano euklidestarra zenbaki errealen bikote ordenatuen multzoa da.

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 \text{ eta } x_2 \text{ zenbaki errealak dira} \right\}$$

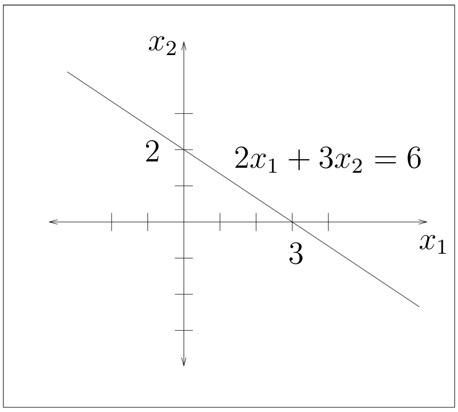


A.1. Irudia: Espazio euklidestarra

$\mathbb{R}^2$ espazioa A.1. Irudian ikusten den moduan adierazten da geometrikoki.

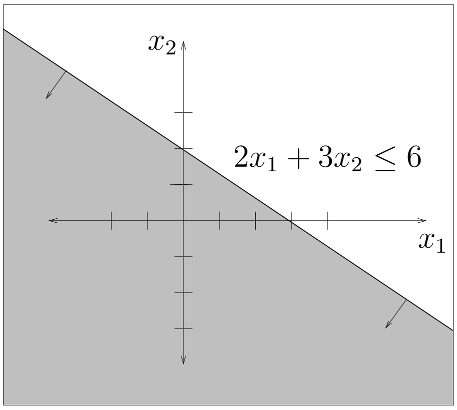
Irudian adierazitako puntua $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bikoteari dagokio.

$a_1x_1 + a_2x_2 = c$ ekuazioak, a_1, a_2 eta c konstanteak izanik, *zuzen* bat adierazten du $\mathbb{R}^2$ espazioan. Adibidez, $2x_1 + 3x_2 = 6$ ekuazioa A.2. Irudian ikus daiteke grafikoki adierazia.



A.2. Irudia: Zuzena planoan

$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ moduko inekuazioa $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ zuzenean dauden puntuek eta zuzenaren alde batean dauden puntuek osatutako multzoa da. Adibidez, $2x_1 + 3x_2 = 6$ zuzenaren alde bateko puntuek $2x_1 + 3x_2 < 6$ desberdintza betetzen dute, eta beste aldean dauden puntuek $2x_1 + 3x_2 > 6$ desberdintza. A.3. Irudian margotuta adierazten da $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ inekuazioak adierazitako puntuen multzoa.



A.3. Irudia: Inekuazioa planoan

$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ edo $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$ moduko desberdintzak betetzen dituzten puntuen multzoari $\mathbb{R}^2$ espazioko *planoerdi itxia* esaten zaio, a_1 edo a_2 konstanteetako bat gutxienez zeroren desberdina izanik.

Hiru dimentsioko *espazio euklidestarra* hirukote ordenatuen multzoa da.

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \text{ eta } x_3 \text{ zenbaki errealak izanik} \right\}$$

$\mathbb{R}^3$ espazioan $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ ekuazioak, non a_1, a_2, a_3 eta c konstanteak diren, *plano* bat adierazten du. Adibidez, $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$ ekuazioa plano bat da.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq c$ edo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq c$ moduko desberdintzak betetzen dituzten puntuen multzoek $\mathbb{R}^3$ espazioan *espazioerdi itxia* osatzen dute.

Ideia hauek n dimentsioko espazio euklidestarrera orokor daitezke.

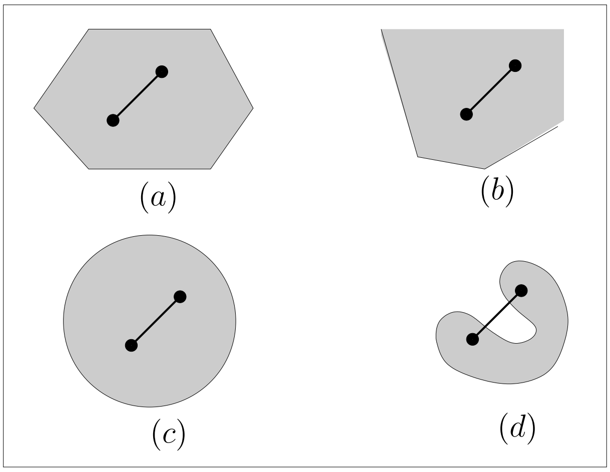
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \ldots x_n \text{ zenbaki errealak izanik} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ espazioan $a_1, \ldots, a_n$ eta c konstanteak dituen $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = c$ ekuazioak *hiperplano* bat adierazten du.

$\mathbb{R}^n$ espazioan $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq c$ desberdintza betetzen duten puntuen multzoa edo $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \geq c$ desberdintza betetzen dutenena *espazioerdi itxiak* dira.

A.4.1 Definizioa. $\mathbb{R}^n$ *espazioko* C *azpimultzoa* multzo ganbila *da baldin multzo hutsa bada, multzoak puntu bakarra badu edo multzoko edozein bi puntutarako bi puntuak lotzen dituen segmentua multzoaren barnean badago.*

A.4. Irudian ikus daiteke (a), (b) eta (c) multzo ganbilak direla, baina (d) multzoa ez.



A.4. Irudia: Multzo ganbilak (a), (b), (c). Ez-ganbila (d)

Ondoko emaitzak froga daitezke:

- Hiperplanoa multzo ganbila da.
- Espazioerdi itxia multzo ganbila da.
- Multzo ganbilen kopuru finituaren arteko ebakidura multzo ganbila da.

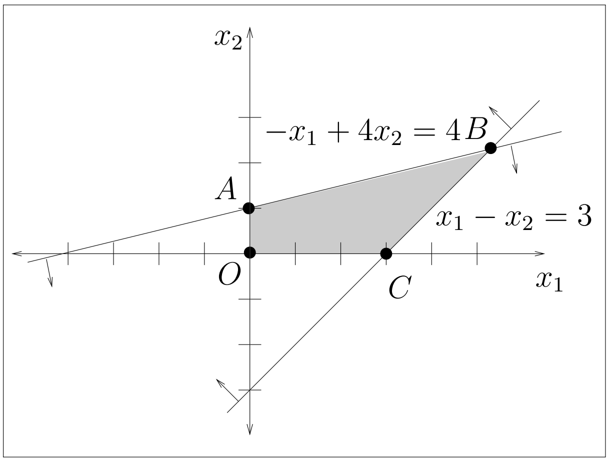
Eredu linealen azterketan agertzen diren soluzio-multzoak hiperplanoak, espazioerdi itxiak eta beraien arteko ebaki-multzoak dira; ikusitako ondorioen arabera, guztiak dira multzo ganbilak.

A.5 Mutur-puntuak eta oinarriko soluzio bideragarriak

Inekuazio linealen multzo bat ekuazio linealen multzo bihur daiteke inekuazioetan aldagaiak gehituz. Inekuazio-sistema bat ekuazio-sistema bihurtuz, inekuaziosistemaren mutur-puntuen eta ekuazio-sistemaren oinarriko soluzioen artean dagoen erlazioa ikusiko dugu adibide baten bidez, beti ere aldagaiak zero baino handiagoak edo berdinak diren balioak hartzera murriztuta badaude.

Har dezagun inekuazio linealen sistema hau, $x_1 \geq 0$ eta $x_2 \geq 0$ izanik:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$



A.5. Irudia: Multzo ganbila eta mutur-puntuak

A.5. Irudian adierazten dira bi inekuazioak betetzen dituzten $x_1 \geq 0$ eta $x_2 \geq 0$ aldagaietarako balioak. Ikus daiteke lau espazioerdi itxi horien arteko ebakidura multzo ganbil itxia dela, poligono bat kasu honetan. Poligonoak erpin kopuru finitua du; multzoaren mutur-puntuak dira.

O puntua koordenatu-ardatzen jatorria da. A puntua $-x_1+4x_2 = 4$ zuzenaren eta ordenatu-ardatzaren arteko ebaki-puntua da. $-x_1 + 4x_2 = 4$ zuzenaren eta $x_1-x_2 = 3$ zuzenaren arteko ebaki-puntua B da. C puntua $x_1-x_2 = 3$ zuzenaren eta abzisa-ardatzaren arteko ebaki-puntua da.

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adibidean bi dimentsioko espazio euklidestarrean gertatu den moduan, hiru dimentsioko espazio euklidestarrean ere espazioerdi itxien kopuru finituaren arteko ebaki-multzoa multzo ganbila da, hau da, edo multzo hutsa da, edo puntu bakarra duen multzoa da edo mutur-puntu kopuru finitua duen poliedroa da. Oro har, plano euklidestarrean espazioerdi itxien kopuru finituaren arteko ebaki-multzoa multzo ganbila da, hau da, edo multzo hutsa da, edo puntu bakarra duen multzoa da edo mutur-puntu kopuru finitua duen politopoa da.

Bi inekuazioak ekuazio bihurtuko ditugu x_3 eta x_4 aldagai ez-negatiboak gehituz. Honako sistema lortuko da, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ izanik:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 \quad\quad &= 4 \\ x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Ekuazio-sistema horrek infinitu soluzio ditu, inekuazio-sistemak dituen soluzio berberak. Oinarriko soluzioak kalkula ditzakegu, eta soluzioen artean osagaiak zero baino handiagoak edo berdinak dituztenak aukeratu. Ikusiko dugunez, horiek dira A.5. Irudiko soluzioen poligonoaren mutur-puntuak.

1. Ekuazio-sistemaren matrizearen lehenengo eta bigarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_3 = x_4 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   Sistemaren soluzioa $x_1 = \frac{16}{3}$ eta $x_2 = \frac{7}{3}$ da, eta grafikoko B mutur-puntuari dagokio (ikus A.5. Irudia).

2. Ekuazio-sistemaren matrizearen lehenengo eta hirugarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_2 = x_4 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 4 \\ x_1 \quad\quad &= 3 \end{aligned}$$

   Sistemaren soluzioa $x_1 = 3$ eta $x_3 = 7$ da, eta grafikoko C mutur-puntuari dagokio (ikus A.5. Irudia).

3. Ekuazio-sistemaren matrizearen lehenengo eta laugarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_2 = x_3 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\quad &= 4 \\ x_1 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

   Sistemaren soluzioa $x_1 = -4$ eta $x_4 = 7$ da, eta ez dagokio soluzioen poligonoaren mutur-puntu bati, soluzioak osagai negatibo bat duelako.

4. Ekuazio-sistemaren matrizearen bigarren eta hirugarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_1 = x_4 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 \quad\quad &= 3 \end{aligned}$$

   Sistemaren soluzioa $x_2 = -3$ eta $x_3 = 16$ da, eta ez dagokio soluzioen poligonoaren mutur-puntu bati, soluzioak osagai negatibo bat duelako.

5. Ekuazio-sistemaren matrizearen bigarren eta laugarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_1 = x_3 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} 4x_2 \quad\quad &= 4 \\ -x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Sistemaren soluzioa $x_2 = 1$ eta $x_4 = 4$ da, eta grafikoko A mutur-puntuari dagokio (ikus A.5. Irudia).

6. Ekuazio-sistemaren matrizearen hirugarren eta laugarren zutabeak aukeratuko ditugu. Zutabe horiek linealki independenteak dira. $x_1 = x_2 = 0$ egin eta honako sistema lortuko dugu:

$$
\begin{aligned}
x_3 \quad\quad &= 4 \\
x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Sistemaren soluzioa $x_3 = 4$ eta $x_4 = 3$ da, eta grafikoko O mutur-puntuari dagokio (ikus A.5. Irudia).

□

Aldagaiak zero baino handiagoak edo berdinak dituzten espazioerdi itxien arteko ebakidura den multzo ganbilaren mutur-puntuen kalkulua orokor daiteke dimentsioa bi baino handiagoa duten espazioetara. Horrela mutur-puntuak kalkulatu ahal izango dira espazioerdiak grafikoki irudikatu gabe.