ARIKETAK

1.- Aztertu ondorengo $f : V \times V \to K$ aplikazioak forma bilinealak direnentz

(i) $V = \mathbb{R}^2$,$K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1x_2$;

(ii) $V = \mathbb{R}^2$,$K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;

(iii) $V = \mathbb{R}^3$,$K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1x_2 - x_1y_2 + 2x_3y_3$.

Forma bilinealak direnean aztertu simetrikoak direnentz.

2.- Kalkulatu f forma bilinealari elkartutako matrizea β_V oinarriarekiko:

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$, $\beta_V = \{(2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

(ii) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $f(a_1 + a_2x + a_3x^2, b_1 + b_2x + b_3x^2) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_2b_1 - 3a_2b_3 + 3a_3b_3$, $\beta_V = \{1, x, x^2\}$.

3.- Izan bedi $\beta = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria eta f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala non f-ri elkartutako matrizea oinarri horrekiko:

$$A = M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Kalkulatu oinarri ortogonal bat f-rekiko, f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko lortu gabe.

(ii) Lortu $f((x_1, x_2), (y_1, y_2))$.

4.- Izan bitez $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala non elkartutako matrizea β oinarri finko batekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu forma bilineal honen signatura.

5.- Aztertu ondorengo bikotea kongruetea denentz, hots, existitzen bada

$P \in GL(n, \mathbb{R})$ non $A = {}^tPBP$ den. Horrela denean aurkitu P.

(i) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -14 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -14 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6.- Adierazi ondorengo forma kuadratikoa karratu independenteen biderkadura moduan,

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 4xz - 4yz.$$

(Argibidea: Lortu q-ri elkartutako forma bilineal simetrikoa eta gero aurkitu oinarri ortogonal bat. Oinarri honetan idatzi q.)

PROBLEMAK

1.- Aztertu, λ-ren arabera, A matrizearen signatura,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2.- Izan bedi f forma bilineala non,

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2.$$

(i) Kalkulatu A f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko.

(ii) Lortu f-rekiko ortogonala den oinarri bat. Oinarri berrian aurkitu f-ri elkartutako matrizea B.

(iii) Aurkitu $P \in GL(3, \mathbb{R})$ non $A = {}^tPBP$ den.

(iv) Aztertu ondorengo matrizeak f-ri elkartuta dauden: $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ eta $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.- Izan bedi V espazio bektoriala, $f : V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa eta $h : V \to V$ aplikazio lineal ez injektiboa. Definitzen dugu $g : V \times V \to K$ forma bilineala non $g(u,v) = f(h(u), h(v))$ den. Froga ezazu g endakatua dela.