CAPÍTULO 4

ORTOGONALIDAD EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS.

APROXIMACIÓN LINEAL EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS.

MATRICES CUADRADAS DIAGONALIZABLES.

1.- PRODUCTO ESCALAR Y NORMA DE UN VECTOR

Para calcular el producto escalar usual de dos vectores u y v de un mismo espacio vectorial se utiliza el símbolo • (un punto): $u \bullet v$

```
In[1]:= a = {1, -2, 3}; b = {0, 1, 5};

In[2]:= a.b

Out[2]= 13

In[5]:= c = {0, 4, -2, 5}; d = {1, 0, 0, 3};

In[6]:= c.d

Out[6]= 15
```

La norma usual de un vector se obtiene de la función **Norm.**

```
In[7]:= Norm[a]

Out[7]= √14

In[8]:= Norm[b]

Out[8]= √26

In[9]:= Norm[c]

Out[9]= 3 √5

In[10]:= Norm[d]

Out[10]= √10
```

Si se desea considerar otro producto escalar distinto del usual, debemos definirlo previamente como una función.

EJERCICIO 1

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar definido por:

$$<\overline{x},\overline{y}>= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \quad \forall \overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

a.- Calcular el producto escalar de los vectores: $\overline{x} = (2,1,-1), \quad \overline{y} = (3,0,1)$.

```
In[2]:= pe[x_, y_] := x[[1]] y[[1]] + x[[1]] y[[2]] +
           x[[2]] y[[1]] + 2 x[[2]] y[[2]] + x[[3]] y[[3]]

In[3]:= pe[{2, 1, -1}, {3, 0, 1}]

Out[3]= 8
```

b.- Calcular la norma del vector $\overline{x} = (2,1,-1)$.

```
In[4]:= n[x_] := Sqrt[pe[x, x]];

In[5]:= n[{2, 1, -1}]

Out[5]= √11
```

c.- Calcular la distancia entre los vectores $\overline{x} = (2,1,-1)$, $\overline{y} = (3,0,1)$

```
In[6]:= d[x_, y_] := n[x - y];

In[7]:= d[{2, 1, -1}, {3, 0, 1}]

Out[7]= √5
```

d.- Calcular la matriz de Gram del producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

```
In[8]:= u = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};

In[9]:= gu = Table[pe[u[[i]], u[[j]]], {i, 3}, {j, 3}]

Out[9]= {{1, 1, 0}, {1, 2, 0}, {0, 0, 1}}

In[10]:= MatrixForm[%]

Out[10]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[11]:= Det[gu]

Out[11]= 1
```

Observamos que la matriz de Gram es simétrica, regular y los elementos de la diagonal principal son estrictamente positivos.

2.- BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

La función **GramSchimdt** nos permite obtener un sistema ortogonal o ortonormal a partir de un sistema libre. Su sintaxis es:

GramSchmidt[{u1,u2,...,un},InnerProduct->pe]

A partir del sistema libre {u1,u2,...,un}, utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schimdt, se obtiene un sistema ortonormal.

GramSchmidt[{u1,u2,...,un},InnerProduct->pe,Normalized->False]
A partir del sistema libre {u1,u2,...,un}, utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schimdt, se obtiene un sistema ortogonal.

Para poder utilizar esta función debemos cargar previamente el paquete:

<<LinearAlgebra\`Orthogonalization\`

EJERCICIO 2

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar definido en el ejercicio 1 por:

$$<\overline{x},\overline{y}>= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \quad \forall\overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Hallar una base ortogonal y una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3,<,>)$.

```
In[1]:= pe[x_, y_] := x[[1]] y[[1]] + x[[1]] y[[2]] + x[[2]] y[[1]] +
          2 x[[2]] y[[2]] + x[[3]] y[[3]]
```

```
In[2]:= u = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

```
In[3]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[4]:= GramSchmidt[u, InnerProduct → pe]

Out[4]= {{1, 0, 0}, {-1, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Construye un sistema ORTONORMAL del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle \equiv pe)$
utilizando Gram – Schmidt a partir del SISTEMA libre u

```
In[5]:= GramSchmidt[u, InnerProduct → pe, Normalized → False]

Out[5]= {{1, 0, 0}, {-1, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Construye un sistema ORTOGONAL del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle \equiv pe)$
utilizando Gram – Schmidt a partir del SISTEMA libre u

Cuando en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ estamos considerando el producto escalar usual, podemos omitir la opción **InnerProduct->pe** de la función **GramSchmidt,** pues Mathematica sobreentiende que estamos trabajando con dicho producto usual.

EJERCICIO 3

Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3,<,>)$, en donde el producto escalar <,> es el usual. Hallar una base ortogonal y una base ortonormal del subespacio vectorial S = L({(2,1,1),(1,0,-1)}).

```
In[16]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[17]:= u = {{2, 1, 1}, {1, 0, -1}};
```

Comprobamos que el sistema us es libre :

```
In[18]:= Solve[a1 u[[1]] + a2 u[[2]] == 0, {a1, a2}]

Out[18]= {{a1 → 0, a2 → 0}}
```

```
In[20]:= es = GramSchmidt[u, Normalized → False]
```

$$\text{Out[20]= } \left\{\{2,1,1\},\left\{\frac{2}{3},-\frac{1}{6},-\frac{7}{6}\right\}\right\}$$

$$B=\left\{(2,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},-\frac{7}{6}\right)\right\}$$

BASE ORTOGONAL DE S.

```
In[21]:= ep = GramSchmidt[u]
```

$$\text{Out[21]= } \left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\left\{2\sqrt{\frac{2}{33}},-\frac{1}{\sqrt{66}},-\frac{7}{\sqrt{66}}\right\}\right\}$$

$$B1=\left\{\overline{v_1}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(2\sqrt{\frac{2}{33}},-\frac{1}{\sqrt{66}},-\frac{7}{\sqrt{66}}\right)\right\}$$

BASE ORTONORMAL DE S.

3.- MEJOR APROXIMACIÓN DE UN VECTOR EN UN SUBESPACIO VECTORIAL

La función **Projection** nos permite hallar la proyección ortogonal de un vector u en un subespacio vectorial $S=L(\{v1,v2,....,vn\})$. Su sintaxis es:

Sum[Projection[u,v[[i]],InnerProduct->pe],{i,n}]

donde **Projection[u,v,InnerProduct->pe]** nos determina el vector proyección ortogonal de **u** sobre **v** respecto del producto escalar **pe**. Si se esta utilizando el producto escalar usual, la opción **InnerProduct->pe** se puede suprimir.

Para poder utilizar esta función debemos cargar previamente el paquete:

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`

EJERCICIO 4

Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y sea

$$S=\mathcal{L}(\{(1,0,1,0),(1,-1,0,1),(1,1,1,1)\}).$$

Hallar la mejor aproximación del vector $\overline{v}=(2,5,3,4)$ en S.

```
In[1]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[2]:= u = {{1, 0, 1, 0}, {1, -1, 0, 1}, {1, 1, 1, 1}}

Out[2]= {{1, 0, 1, 0}, {1, -1, 0, 1}, {1, 1, 1, 1}}
```

Comprobamos que el sistema u es libre

```
In[3]:= Solve[a1 u[[1]] + a2 u[[2]] + a3 u[[3]] == {0, 0, 0, 0},
          {a1, a2, a3}]

Out[3]= {{a1 → 0, a2 → 0, a3 → 0}}
```

ORTOGONALIZAMOS la base u de S

```
In[4]:= e1 = GramSchmidt[u, Normalized → False]
```

Out[4]= $\left\{\{1, 0, 1, 0\}, \left\{\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}, \{0, 1, 0, 1\}\right\}$

No ha sido necesario indicar el producto escalar, pues trabajamos en $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual.

```
In[5]:= v = {2, 5, 3, 4};

In[6]:= vp = Sum[Projection[v, e1[[i]]], {i, 3}]
```

Out[6]= $\left\{\frac{11}{5}, \frac{51}{10}, \frac{14}{5}, \frac{39}{10}\right\}$

Mejor aproximación de $\overline{v}$ en S:

$$\overline{vp}=\left(\frac{11}{5}, \frac{51}{10}, \frac{14}{5}, \frac{39}{10}\right)$$

EJERCICIO 5

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar definido por:

$$<\overline{x},\overline{y}>=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3 \quad \forall\overline{x}=(x_1,x_2,x_3),\overline{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

Hallar la mejor aproximación del vector $\overline{v}=(1,3,4)$ en $S=L\left(\{(2,1,1),(1,0,-1)\}\right)$.

```
In[1]:= pe[x_, y_] := x[[1]] y[[1]] + x[[1]] y[[2]] + x[[2]] y[[1]] +
          2 x[[2]] y[[2]] + x[[3]] y[[3]]
```

```
In[2]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[4]:= us = {{2, 1, 1}, {1, 0, -1}};

                                  Comprobamos que el sistema us es libre

In[5]:= Solve[a1 us[[1]] + a2 us[[2]] == 0, {a1, a2}]

Out[5]= {{a1 → 0, a2 → 0}}

                                  Ortogonalizamos la base us de S.

In[6]:= es = GramSchmidt[us, InnerProduct → pe, Normalized → False]

Out[6]= {{2, 1, 1}, {7/11, -2/11, -13/11}}
```

$B = \left\{ \overline{v_1} = (2, 1, 19), \left(\frac{7}{11}, -\frac{2}{11}, -\frac{13}{11} \right) \right\}$

base ortogonal de S.

```
In[7]:= v = {1, 3, 4};

In[8]:= vp = Sum[Projection[v, es[[i]], InnerProduct → pe], {i, 2}]

Out[8]= {19/9, 19/9, 38/9}
```

La mejor aproximación del vector $\overline{v} = (1,3,4)$ en $S = L(\{(2,1,1),(1,0,-1)\})$ es:

$$\overline{v}_p = \left(\frac{19}{9}, \frac{19}{9}, \frac{38}{9} \right)$$

EJERCICIO 6

Sea el espacio vectorial euclídeo $(M_{2x3}, <,>)$, en donde el producto escalar <,> viene definido por:

$$< A, B >= \text{traza}\,(B^T.A) \qquad \forall A, B \in M_{2x3}(\mathbb{R})$$

Hallar la mejor aproximación de la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el subespacio vectorial:

$$S = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

```
In[1]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[2]:= c = (1 1 1; 0 1 1); e1 = (1 1 0; 1 0 -1); e2 = (1 0 -1; 0 1 -1); e3 = (0 1 1; 1 2 0);

In[5]:= pe[a_, b_] := Tr[Transpose[b].a]
```

Veamos si es libre el sistema $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

```
In[6]:= Solve[a1 e1 + a2 e2 + a3 e3 == 0, {a1, a2, a3}]

Out[6]= {{a1 → 0, a2 → 0, a3 → 0}}
```

El sistema es libre por tanto es una base del subespacio vectorial S. Tenemos que calcular una base ortogonal de S.

```
In[7]:= u = GramSchmidt[{e1, e2, e3}, InnerProduct → pe, Normalized → False]
```

Out[7]= $\left\{\{\{1, 1, 0\}, \{1, 0, -1\}\}, \left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \left\{\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right\}\right\}\right\}$

Una vez obtenida la base ortogonal, la mejor aproximación de la matriz C en el subespacio vectorial S es:

```
In[9]:= v = Sum[Projection[c, u[[i]], InnerProduct → pe], {i, 3}]
```

Out[9]= $\left\{\left\{-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{5}{8}, 1, \frac{1}{8}\right\}\right\}$

```
In[10]:= MatrixForm[%]
```

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{8} & 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1/8 & 5/8 & 3/4 \\ 5/8 & 1 & 1/8 \end{pmatrix}$$

La norma del vector error de dicha aproximación es:

```
In[12]:= q = c - v
```

Out[12]= $\left\{\left\{\frac{9}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{-\frac{5}{8}, 0, \frac{7}{8}\right\}\right\}$

```
In[13]:= MatrixForm[%]
```

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

In[14]:= n[x_] := $\sqrt{\text{pe[x, x]}}$;

```
In[15]:= n[q]
```

Out[15]= $\dfrac{\sqrt{\frac{21}{2}}}{2}$

EJERCICIO 7

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales expresado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a.- Comprobar que el sistema es incompatible.
b.- Calcular la solución aproximada (o solución óptima) en mínimos cuadrados.

In[1]:= $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

```
In[2]:= LinearSolve[a, b]

LinearSolve::nosol :
 Linear equation encountered which has no solution. More…

Out[2]= LinearSolve[{{1, 0, -1}, {0, 2, 1}, {1, 1, 1}, {-1, 2, 1}},
  {{1}, {1}, {1}, {1}}]
```

El sistema es incompatible. Vamos ahora a calcular una solución aproximada.

```
In[6]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[7]:= u = {{1, 0, 1, -1}, {0, 2, 1, 2}, {-1, 1, 1, 1}};
```

1.– Comprobamos que u es un sistema libre :

In[8]:= `RowReduce[u]`

Out[8]= $\left\{\left\{1, 0, 0, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 1, 0, \frac{4}{3}\right\}, \left\{0, 0, 1, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

2.– Proceso de ortogonalización de Gram – Schmidt :

In[9]:= `w = GramSchmidt[u, Normalized → False]`

Out[9]= $\left\{\{1, 0, 1, -1\}, \left\{\frac{1}{3}, 2, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}, \left\{-\frac{11}{13}, -\frac{1}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{3}{13}\right\}\right\}$

3.– Mejor aproximación de b en $\mathcal{L}$(u) :

```
In[11]:= b = {1, 1, 1, 1};

In[12]:= bp = Sum[Projection[b, w[[i]]], {i, 3}]
```

Out[12]= $\left\{\frac{14}{15}, \frac{19}{15}, \frac{13}{15}, \frac{4}{5}\right\}$

4.– Resolver el S.C.D. :

$x_1\,\overline{a_1} + x_2\,\overline{a_2} + x_3\,\overline{a_3} = \overline{bp}$

In[13]:= `s = Solve[x u[[1]] + y u[[2]] + z u[[3]] == bp, {x, y, z}]`

Out[13]= $\left\{\left\{x \to \frac{7}{15}, y \to \frac{13}{15}, z \to -\frac{7}{15}\right\}\right\}$

Solución aproximada del S.I. :

$$\left(\frac{7}{15}, \frac{13}{15}, -\frac{7}{15}\right)$$

4.- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ CUADRADA. MATRICES CUADRADAS DIAGONALIZABLES

Para obtener los valores y vectores propios de una matriz cuadrada, disponemos de las siguientes funciones:

Eigenvalues[A]	Valores propios de la matriz A
Eigenvectors[A]	Vectores propios de la matriz A
Eigensystem[A]	Valores y vectores propios de la matriz A

EJERCICIO 8

Hallar los valores propios y los subespacios propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & -6 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

```
In[1]:= a = (1  3  -3
             6  4  -6
             3  3  -5);

In[2]:= Eigenvalues[a]

Out[2]= {4, -2, -2}

In[3]:= Eigenvectors[a]

Out[3]= {{1, 2, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 4 \qquad k_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad k_2 = 2$$

Subespacios propios de A:

$$V(4) = L\left(\{(1,2,1)\}\right)$$
$$V(-2) = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,0)\}\right)$$

```
In[4]:= Eigensystem[a]

Out[4]= {{4, -2, -2}, {{1, 2, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

El polinomio característico de una matriz A se obtiene a partir de la función:

CharacteristicPolynomial[A,x]

en la que x representa la variable con respecto a la cual se expresa el polinomio.

EJERCICIO 9

Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de la matriz B, indicando una base de los mismos.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 6 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar B, si es posible.

```
In[5]:= b = {{-3, -1, 1}, {-6, -2, 6}, {-7, -1, 5}};

In[6]:= CharacteristicPolynomial[b, x]
Out[6]= 16 + 12 x - x^3

In[7]:= Factor[%]
Out[7]= -(-4 + x) (2 + x)^2

In[8]:= Eigenvalues[b]
Out[8]= {4, -2, -2}

In[9]:= Eigenvectors[b]
Out[9]= {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}

In[10]:= Eigensystem[b]
Out[10]= {{4, -2, -2}, {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}
```

Polinomio característico de B: $p(\lambda) = (-1)^3(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$

Valores propios de B:

$$\lambda_1 = 4 \qquad k_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -2 \quad k_2 = 2$$

Subespacios propios de A:

$$V(4) = L\left(\{(0,1,1)\}\right) \qquad d_1 = 1$$
$$V(-2) = L\left(\{(1,0,1)\}\right) \quad d_2 = 1$$

B NO es diagonalizable ya que $2 = k_2 \neq d_2 = 1$

EJERCICIO 10

Diagonalizar ortogonalmente la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

```
In[11]:= A = {{5, 1, 1}, {1, 5, 1}, {1, 1, 5}};

In[12]:= Eigenvalues[A]

Out[12]= {7, 4, 4}

In[13]:= Eigenvectors[A]

Out[13]= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 7 \quad k_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 4 \quad k_2 = 2$$

Subespacios propios de A:

$$V(7) = L(\{(1,1,1)\}) \quad d_1 = 1$$
$$V(4) = L(\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}) \quad d_2 = 2$$

La matriz real y simétrica A es diagonalizable, es decir, existe una matriz P regular tal que se cumple $D = P^{-1}AP$, siendo D una matriz diagonal.

$$D = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} P \quad \text{donde} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para diagonalizar ortogonalmente la matriz A debemos ortonormalizar la base de vectores propios encontrada en Out [13].

```
In[14]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`

In[15]:= u = {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}};

In[16]:= GramSchmidt[u]
```

$$\text{Out[16]=} \left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$$

La matriz A es ortogonalmente diagonalizable, existe una matriz Q ortogonal tal que se cumple:

$$D = Q^T AQ$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$