CAPÍTULO 2

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.

1.- SIMPLIFICAR EXPRESIONES

Al introducir una expresión no siempre se obtiene como resultado una expresión más sencilla que corresponda a la simplificación automática, por lo que será necesario utilizar los correspondientes comandos.

Para simplificar una expresión simbólica, se utiliza el comando **Simplify** cuya sintaxis es:

Simplify[expresión]

In[1]:= $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

Out[1]= $\frac{-1 + 3x - 3x^2 + x^3}{-1 + x}$

In[2]:= Simplify$\left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}\right]$

Out[2]= $(-1 + x)^2$

In[3]:= $(x - 2)^3 - 2x + 5x^2 - x^3$

Out[3]= $(-2 + x)^3 - 2x + 5x^2 - x^3$

In[4]:= Simplify$\left[(x - 2)^3 - 2x + 5x^2 - x^3\right]$

Out[4]= $-8 + 10x - x^2$

2.- FACTORIZAR EXPRESIONES

Para factorizar una expresión no numérica se utiliza el comando **Factor,** cuya sintaxis es

Factor [expresión]

Este comando se utiliza para descomponer en factores una expresión polinómica.

La descomposición en factores que efectúa este comando se realiza en el conjunto de los números enteros.

In[5]:= Factor$\left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}\right]$

Out[5]= $\frac{(-1 + x)^2}{1 + x}$

In[6]:= Factor$\left[x^2 - 7x + 12\right]$

Out[6]= $(-4 + x)(-3 + x)$

Para descomponer en factores un número entero se utiliza el comando **FactorInteger**, cuya sintaxis es:

FactorInteger[número]

```
In[7]:= FactorInteger[43200]

Out[7]= {{2, 6}, {3, 3}, {5, 2}}
```

El resultado anterior corresponde a la lista formada por pares de valores, en los que el primer valor de cada par representa uno de los factores y el segundo valor indica su multiplicidad.

Por tanto, el resultado anterior se interpreta:

$$43200 = 2^6\, 3^3\, 5^2$$

3.- DESARROLLAR EXPRESIONES

Para desarrollar una expresión se utiliza el comando **Expand**, cuya sintaxis es similar a los comandos expuestos anteriormente.

Expand[expresión]

Por ejemplo, para desarrollar un binomio de Newton será necesario aplicar este comando.

In[8]:= $\mathbf{Expand}\left[\left(2x - \frac{3}{x}\right)^4\right]$

Out[8]= $216 + \frac{81}{x^4} - \frac{216}{x^2} - 96x^2 + 16x^4$

In[9]:= $\mathbf{Expand}\left[(x^2 - 1)^5 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3\right]$

Out[9]= $-22 - \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x} + 50x + 20x^2 - 110x^3 + 20x^4 + 115x^5 - 50x^6 - 59x^7 + 34x^8 + 12x^9 - 8x^{10}$

Al efectuar operaciones con polinomios la ordenación de los monomios es de menor a mayor grado, para conseguir la ordenación contraria habrá que utilizar el comando **TraditionalForm**, que se podrá añadir a una expresión. Este comando admite distintos formatos:

TraditionalForm[%]

Expresión// TraditionalForm

Expand[expresión] // TraditionalForm

TraditionalForm[expresión]

TraditionalForm[Expand[expresión]]

```
In[10]:= TraditionalForm[%]
```

Out[10]//TraditionalForm=

$$-8x^{10}+12x^9+34x^8-59x^7-50x^6+115x^5+20x^4-110x^3+20x^2+50x-22-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

In[11]:= $\text{Expand}\left[\left(2\,x-\frac{3}{x}\right)^4\right]$ // TraditionalForm

Out[11]//TraditionalForm=

$$16x^4-96x^2+216-\frac{216}{x^2}+\frac{81}{x^4}$$

In[13]:= $\text{TraditionalForm}\left[\text{Expand}\left[\left(2\,x-\frac{3}{x}\right)^4\right]\right]$

Out[13]//TraditionalForm=

$$16x^4-96x^2+216-\frac{216}{x^2}+\frac{81}{x^4}$$

Cuando una expresión contiene más de una variable, se indicará en el comando la variable con respecto a la que efectuar su desarrollo.

Expand[expresión,variable]

In[19]:= $\text{Expand}\left[(x+3\,y)^2\,(2-x\,y),\,y\right]$

Out[19]= $2\,x^2+12\,x\,y-x^3\,y+18\,y^2-6\,x^2\,y^2-9\,x\,y^3$

Para agrupar las potencias de la variable indicada en la expresión que se desea desarrollar se utiliza el comando **Collect.**

Collect[expresión,variable]

In[20]:= $\text{Collect}\left[(x+3\,y)^2\,(2-x\,y),\,y\right]$

Out[20]= $2\,x^2+(12\,x-x^3)\,y+(18-6\,x^2)\,y^2-9\,x\,y^3$

In[21]:= $\text{Collect}\left[(x+3\,y)^2\,(2-x\,y),\,x\right]$

Out[21]= $-x^3\,y+18\,y^2+x^2\,(2-6\,y^2)+x\,(12\,y-9\,y^3)$

4.- FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para simplificar una fracción algebraica se utiliza el comando **Simplify**. Si aplicamos el comando **Expand** a una fracción algebraica, se obtiene su descomposición en suma de fracciones.

In[23]:= $\text{Simplify}\left[\frac{x^3+7\,x^2+32}{x\,(x^2-4)}\right]$

Out[23]= $\frac{32+7\,x^2+x^3}{x\,(-4+x^2)}$

In[24]:= $\text{Expand}\left[\frac{x^3+7\,x^2+32}{x\,(x^2-4)}\right]$

Out[24]= $\frac{32}{x\,(-4+x^2)}+\frac{7\,x}{-4+x^2}+\frac{x^2}{-4+x^2}$

Si se utiliza el comando **ExpandNumerator** se obtiene una expresión en la que sólo se desarrolla el numerador, mientras que si se aplica **ExpandDenominator** la expresión que se obtiene corresponde al resultado de desarrollar el denominador.

In[25]:= $\mathbf{Expand}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[25]= $\frac{9}{(1-2x^2)^2}-\frac{30x}{(1-2x^2)^2}+\frac{25x^2}{(1-2x^2)^2}$

In[26]:= $\mathbf{ExpandNumerator}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[26]= $\frac{9-30x+25x^2}{(1-2x^2)^2}$

In[27]:= $\mathbf{ExpandDenominator}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[27]= $\frac{(3-5x)^2}{1-4x^2+4x^4}$

Si se emplea el comando **ExpandAll** aparece una suma de fracciones en la que se han desarrollado las expresiones del numerador y del denominador.

In[28]:= $\mathbf{ExpandAll}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[28]= $\frac{9}{1-4x^2+4x^4}-\frac{30x}{1-4x^2+4x^4}+\frac{25x^2}{1-4x^2+4x^4}$

Si aplicamos a una fracción algebraica el comando **Apart**, obtendremos la descomposición en fracciones simples.

In[31]:= $\mathbf{Apart}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[31]= $\frac{43-60x}{2(-1+2x^2)^2}+\frac{25}{2(-1+2x^2)}$

Para realizar el proceso contrario al comando anterior, es decir reducir a común denominador una expresión compuesta por fracciones algebraicas, se utiliza el comando **Together**.

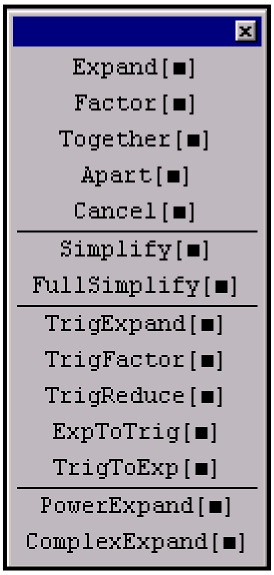
In[31]:= $\mathbf{Apart}\left[\frac{(3-5x)^2}{(1-2x^2)^2}\right]$

Out[31]= $\frac{43-60x}{2(-1+2x^2)^2}+\frac{25}{2(-1+2x^2)}$

In[32]:= **Together[%]**

Out[32]= $\frac{9-30x+25x^2}{(-1+2x^2)^2}$

Los distintos comandos expuestos en los apartados anteriores están disponibles en la paleta **AlgebraicManipulation** que aparecen en la opción **Paletees** en el menú **File**.



5.- RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Para obtener las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ se utiliza el comando **Solve**, cuya sintaxis es:

Solve[f(x)==g(x)]

Si existen, la salida nos proporciona los valores que son solución de la ecuación.

In[33]:= $\text{Solve}[x^2 - 7x + 12 == 0]$

Out[33]= $\{\{x \to 3\}, \{x \to 4\}\}$

Cuando la ecuación contiene más de una variable, se debe indicar en el comando **Solve** la variable con respecto a la que se resolverá.

Solve[f(x)==g(x),variable]

In[35]:= $\text{Solve}[8x^2 - 6mx + m^2 == 0, x]$

Out[35]= $\{\{x \to \frac{m}{4}\}, \{x \to \frac{m}{2}\}\}$

In[36]:= $\text{Solve}[8x^2 - 6mx + m^2 == 0, m]$

Out[36]= $\{\{m \to 2x\}, \{m \to 4x\}\}$

El comando **Solve** puede utilizarse para calcular las raíces de un polinomio., solucionando las carencias del comando **Factor** con el que tan sólo se obtenian los factores correspondientes a las raíces enteras.

Para obtener las raíces de un polinomio será necesario expresarlo en forma de ecuación.

```
In[39]:= Solve[x^4 + 4 x^3 - 25 x^2 - 16 x + 84 == 0]

Out[39]= {{x -> -7}, {x -> -2}, {x -> 2}, {x -> 3}}

In[40]:= Solve[x^3 + x^2 - 7 x - 7 == 0]

Out[40]= {{x -> -1}, {x -> -√7}, {x -> √7}}
```

A través del comando **Solve**, también se obtienen las raíces complejas de una ecuación.

```
In[41]:= Solve[x^2 + 9 == 0]

Out[41]= {{x -> -3 ⅈ}, {x -> 3 ⅈ}}

In[42]:= Solve[x^2 - 2 x + 5 == 0]

Out[42]= {{x -> 1 - 2 ⅈ}, {x -> 1 + 2 ⅈ}}
```

Cuando la ecuación tiene infinitas soluciones, aparece como resultado {{ }}, mientras que si no tiene la ecuación solución el resultado es { }.

```
In[43]:= Solve[(x - 1)^2 == x^2 - 2 x + 1]

Out[43]= {{}}

In[44]:= Solve[(x - 1)^2 == x^2 - 2 x]

Out[44]= {}
```

6.- RAÍCES DE UN POLINOMIO

Las raíces de un polinomio también se podrán obtener a partir del comando **Roots**, cuya sintaxis es:

Roots[expresión,variable]

El resultado que se obtiene es similar al que devuelve el comando **Solve**, cuya aplicación es más general, pues no esta limitado a expresiones polinómicas.

```
In[47]:= Roots[x^3 + x^2 - 7 x - 7 == 0, x]

Out[47]= x == √7 || x == -√7 || x == -1

In[48]:= Roots[x^2 - 2 x + 5 == 0, x]

Out[48]= x == 1 - 2 ⅈ || x == 1 + 2 ⅈ

In[50]:= Roots[x^4 - 81 == 0, x]

Out[50]= x == 3 || x == 3 ⅈ || x == -3 || x == -3 ⅈ
```

7.- RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES

En ocasiones el comando **Solve** no es capaz de hallar las soluciones de una ecuación, por lo que será necesario recurrir a la resolución aproximada.

```
In[51]:= Solve[x^7 + x + 4 == 0]

Out[51]= {{x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 1]},
  {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 2]}, {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 3]},
  {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 4]}, {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 5]},
  {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 6]}, {x → Root[4 + #1 + #1^7 &, 7]}}
```

Para resolver numéricamente una ecuación, se utiliza el comando **NSolve**, cuya sintaxis es:

NSolve[f==g]

NSolve[f==g,variable]

```
In[52]:= NSolve[x^7 + x + 4 == 0]

Out[52]= {{x → 1.13027 + 0.566349 i},
  {x → 1.13027 - 0.566349 i}, {x → 0.226587 + 1.21468 i},
  {x → 0.226587 - 1.21468 i}, {x → -0.776478 + 0.89959 i},
  {x → -0.776478 - 0.89959 i}, {x → -1.16076}}

In[54]:= NSolve[x^5 - x + 1 == 0]

Out[54]= {{x → -1.1673}, {x → -0.181232 + 1.08395 i}, {x → -0.181232 - 1.08395 i},
  {x → 0.764884 + 0.352472 i}, {x → 0.764884 - 0.352472 i}}
```

8.- RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Para resolver un sistema de ecuaciones se utiliza el comando **Solve,** con la sintaxis:

Solve[{f1==a1,f2==a2,….,fm==am}]

```
In[57]:= Solve[{x - 2 y + z == 0, -x + 2 y - 4 z == 1, 2 x + y - 7 z == 4}]

Out[57]= {{x → 11/15, y → 1/5, z → -1/3}}

In[58]:= Solve[{3 x + 2 y - 3 z == 1, x + 3 y - 2 z == -3, 4 x - y - 5 z == 4}]

Out[58]= {{x → 2, y → -1, z → 1}}
```

```
In[59]:= Solve[{x - 2 y + 3 z == 1, y + 2 z == -3, x - 3 y + z == 4}]

         Solve::svars :
          Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…

Out[59]= {{x → -5 - 7 z, y → -3 - 2 z}}
```

El mensaje indica que el sistema es compatible indeterminado y la solución aparece en función de la incógnita “z”.

Cuando el sistema de ecuaciones contiene más incógnitas que ecuaciones, se debe especificar en el comando **Solve** el conjunto de incógnitas que actuarán como principales, para resolver el sistema con respecto a ellas.

```
In[60]:= Solve[{x - y + z + t == 1, x + y + 2 z - t == 2, x - 3 y + z - 3 t == -2}]

         Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…
```

Out[60]= $\left\{\left\{t \to \frac{1}{3} + \frac{z}{6},\ x \to \frac{3}{2} - \frac{3z}{2},\ y \to \frac{5}{6} - \frac{z}{3}\right\}\right\}$

```
In[61]:= Solve[{x - y + z + t == 1, x + y + 2 z - t == 2, x - 3 y + z - 3 t == -2}, {x, y, z}]
```

Out[61]= $\left\{\left\{x \to -\frac{9}{2}(-1 + 2t),\ y \to \frac{1}{2}(3 - 4t),\ z \to 2(-1 + 3t)\right\}\right\}$

Para discutir y posteriormente resolver un sistema de ecuaciones también se usa el comando **Solve**, bastará con resolver el sistema respecto de los incógnitas.

```
In[62]:= Solve[{a x + y + z == 4, x - a y + z == 1, x + y + z == a + 2}, {x, y, z}]
```

Out[62]= $\left\{\left\{x \to -\frac{-2 + a}{-1 + a},\ y \to 1,\ z \to -\frac{3 - a - a^2}{-1 + a}\right\}\right\}$

A partir del resultado obtenido podemos asegurar que si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $a = 1$ el sistema es incompatible. Esta última afirmación la podemos verificar de la forma:

```
In[63]:= {a x + y + z == 4, x - a y + z == 1, x + y + z == a + 2} /. a → 1

Out[63]= {x + y + z == 4, x - y + z == 1, x + y + z == 3}

In[64]:= Solve[%]

Out[64]= {}
```

El comando **NSolve** también se puede utilizar para obtener una aproximación de las soluciones de un sistema de ecuaciones.

```
In[65]:= NSolve[{x^2 - 3 y^2 == 0, x y - 1 == 0}, {x, y}]

Out[65]= {{x → 0. - 1.31607 i, y → 0. + 0.759836 i},
          {x → 0. + 1.31607 i, y → 0. - 0.759836 i},
          {x → -1.31607, y → -0.759836}, {x → 1.31607, y → 0.759836}}
```

Por último mencionar que para resolver tanto ecuaciones como sistemas de ecuaciones con parámetros se debe utilizar el comando **Reduce** en lugar del comando **Solve** citado anteriormente. Su sintaxis es:

Reduce[f==g,variable]

Reduce[{f1==a1,f2==a2,….,fm==am},variables]

```
In[1]:= Solve[a x^2 - 4 x - b == 0, x]

Out[1]= {{x -> (2 - Sqrt[4 + a b])/a}, {x -> (2 + Sqrt[4 + a b])/a}}

In[2]:= Reduce[a x^2 - 4 x - b == 0, x]

Out[2]= (a == 0 && x == -b/4) ||
        (a ≠ 0 && (x == (2 - Sqrt[4 + a b])/a || x == (2 + Sqrt[4 + a b])/a))
```

La respuesta que ofrece el comando **Reduce** es más completa que la del comando **Solve**.

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 0 \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+ab}}{a} \\ \text{Si } a = 0 \quad x = -\dfrac{b}{4} \end{cases}$$

```
In[4]:= Reduce[{x + 3 y - a z == 4, -a x + y + a z == 0,
          -x + 2 a y == a + 2, 2 x - y - 2 z == 0}, {x, y, z}]

Out[4]= (a == 2 && y == (4 + x)/4 && z == 1/8 (-4 + 7 x)) ||
        (a == -3 && x == 1 && y == 0 && z == 1)
```

Esta última imagen muestra la clasificación y resolución del sistema:

$$\begin{cases} x+3y-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay=a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } a=2 & \text{Sistema Compatible Indeterminado} & y=\dfrac{4+x}{4}, z=\dfrac{-4+7x}{8}, x\in\mathbb{R} \\ \text{Si } a=-3 & \text{Sistema Compatible Determinado} & x=1, y=0, z=1 \\ \text{Si } a\neq 2,3 & \text{Sistema Incompatible} & \end{cases}$$

9.- EJEMPLOS

EJEMPLO 1

Sea el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se definen los vectores $\overline{u}_1 = (-1,1,1)$ y $\overline{u}_2 = (0,-1,2)$, se pide:

a) Determinar la combinación lineal que permite expresar el vector de $\mathbb{R}^3$ dado por $\overline{x} = (-2,5,-4)$ en función de los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$.

```
In[7]:= u1 = {-1, 1, 1}; u2 = {0, -1, 2}; x = {-2, 5, -4};

In[8]:= Solve[a u1 + b u2 == x, {a, b}]

Out[8]= {{a → 2, b → -3}}
```

<u>Conclusión</u>:

$$\overline{x} = 2\overline{u}_1 + 3\overline{u}_2$$

b) Demostrar que $\overline{y} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ no es combinación lineal de los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$.

```
In[9]:= u1 = {-1, 1, 1}; u2 = {0, -1, 2}; y = {1, 1, 1};

In[10]:= Solve[a u1 + b u2 == y, {a, b}]

Out[10]= {}
```

c) Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{z} = (\lambda,3,0)$ sea combinación lineal de los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ e indicar los coeficientes de la combinación lineal cuando ésta exista.

```
In[11]:= u1 = {-1, 1, 1}; u2 = {0, -1, 2}; z = {λ, 3, 0};

In[12]:= Reduce[a u1 + b u2 == z, {a, b}]

Out[12]= λ == -2 && a == 2 && b == -1
```

<u>Conclusión</u>:

$$\text{Si} \quad \lambda = -2 \quad \text{entonces} \quad \overline{z} = 2\overline{u}_1 - \overline{u}_2$$

EJEMPLO 2

1.-Discutir la dependencia o independencia lineal de los vectores:

a) $\overline{u}_1 = (1,0,2)$, $\overline{u}_2 = (-1,1,0)$, $\overline{u}_3 = (2,-1,m)$

```
In[1]:= u1 = {1, 0, 2}; u2 = {-1, 1, 0}; u3 = {2, -1, m};

In[3]:= Reduce[a u1 + b u2 + c u3 == 0, {a, b, c}]

Out[3]= (m == 2 && b == -a && c == -a) ||
         (-2 + m ≠ 0 && a == 0 && b == 0 && c == 0)
```

Conclusión:

$$\begin{cases} \text{Si } m = 2 & \text{sistema linealmente dependiente} \\ \text{Si } m \neq 2 & \text{sistema linealmente independiente} \end{cases}$$

b) $\overline{v}_1 = (0,1,1)$, $\overline{v}_2 = (0,-1,2)$, $\overline{v}_3 = (1,1,m)$

```
In[5]:= v1 = {0, 1, 1}; v2 = {0, -1, 2 }; v3 = {1, 1, m};

In[6]:= Reduce[a v1 + b v2 + c v3 == 0, {a, b, c}]

Out[6]= a == 0 && b == 0 && c == 0
```

Conclusión:

Sistema linealmente independiente $\forall m \in \mathbb{R}$

2.- Calcular el rango de la familia de vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, según los distintos valores de m.

$$\begin{cases} \text{Si } m = 2 & r(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}) = 2 \\ \text{Si } m \neq 2 & r(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}) = 3 \end{cases}$$

3.- Indica una base del subespacio vectorial $S = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\})$

$$\begin{cases} \text{Si } m = 2 & \text{Base} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} \\ \text{Si } m \neq 2 & \text{Base} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\} \end{cases}$$

4.- Calcular el rango de la familia de vectores $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, según los distintos valores de m.

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad r(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}) = 3$$

5.- Indica una base del subespacio vectorial $T = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\})$

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \text{Base} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$$

EJEMPLO 3

Sea el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por $S=\{(x,y,z,t)/x-t=y+z=0\}$

a) Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

```
In[15]:= Solve[x - t == y + z == 0, {x, y, z, t}]

         Solve::svars :
          Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…

Out[15]= {{x → t, y → -z}}

In[16]:= x = {x, y, z, t} /. {x → t, y → -z}

Out[16]= {t, -z, z, t}

In[17]:= e1 = x /. {t → 1, z → 0}

Out[17]= {1, 0, 0, 1}

In[18]:= e2 = x /. {t → 0, z → 1}

Out[18]= {0, -1, 1, 0}
```

Conclusión:

$$S=L\left(\{(1,0,0,1),(0,-1,1,0)\}\right)$$

S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

b) Hallar una base B y la dimensión de S.

```
In[17]:= e1 = x /. {t → 1, z → 0}

Out[17]= {1, 0, 0, 1}

In[18]:= e2 = x /. {t → 0, z → 1}

Out[18]= {0, -1, 1, 0}

In[19]:= Solve[a e1 + b e2 == 0, {a, b}]

Out[19]= {{a → 0, b → 0}}
```

Conclusión:

$$B_S=\{(1,0,0,1),(0,-1,1,0)\};\ \dim(S)=2$$

c) Probar que $\overline{s}=(1,2,-2,1)\in S$ y que $\overline{t}=(2,-1,1,-1)\notin S$.

```
In[20]:= Solve[a e1 + b e2 == {1, 2, -2, 1}, {a, b}]

Out[20]= {{a → 1, b → -2}}
```

Conclusión:

$$\overline{s}=(1,2,-2,1)\in S$$

```
In[22]:= Solve[a e1 + b e2 == {2, -1, 1, -1}, {a, b}]
Out[22]= {}
```

Conclusión:

$$\overline{t} = (2,-1,1,-1) \notin S$$

d) Hallar las coordenadas de $\overline{s}$ en la base B de S.

```
In[20]:= Solve[a e1 + b e2 == {1, 2, -2, 1}, {a, b}]
Out[20]= {{a → 1, b → -2}}
```

Conclusión:

$$(1,2,-2,1) = 1(1,0,0,1) - 2(0,-1,1,0)$$

e) Completar la base B de S hasta obtener una base B' de $\mathbb{R}^4$ y hallar las coordenadas de $\overline{t}$ en B'.

```
In[27]:= e3 = {1, 0, 0, 0}; e4 = {0, 1, 0, 0};
In[28]:= Solve[a e1 + b e2 + c e3 + d e4 == {0, 0, 0, 0}, {a, b, c, d}]
Out[28]= {{a → 0, b → 0, c → 0, d → 0}}
```

Conclusión:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$$

```
In[29]:= t = {2, -1, 1, -1};
In[30]:= Solve[a e1 + b e2 + c e3 + d e4 == t, {a, b, c, d}]
Out[30]= {{a → -1, b → 1, c → 3, d → 0}}
```

Conclusión:

$$(2,-1,1,1) = -1(1,0,0,1) + (0,-1,1,0) + 3(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0)$$