EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{arc\,\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{1/x^2}$

SOLUCIÓN 6.1

2. Calcular la derivada de la función: $f(x)=e^{\frac{x+3}{x+1}}$

SOLUCIÓN 6.2

3. Determinar: $\dfrac{\partial^4}{\partial^2 y\partial^2 x}\left[\dfrac{x+y^2}{xy}\right]$

SOLUCIÓN 6.3

4. Calcular:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a\,x}\cos(b\,x)\,dx \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}$$

SOLUCIÓN 6.4

5. Considérese el recinto definido por las desigualdades:

$$x^2+y^2\le 16;\quad y\ge -x^2+4;\quad x\ge 0$$

Calcular el área de dicho recinto.

SOLUCIÓN 6.5

6. Resolver la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con valor inicial:

$$y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}; \quad y(0) = 1, y'(0) = -2$$

SOLUCIÓN 6.6

7. Aplicar la transformada de Laplace para hallar la solución de la ecuación:

$$y''' + y' = \operatorname{sen} x + 2; \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2$$

SOLUCIÓN 6.7

SOLUCIÓN 6.1

In[1]:= $\text{Limit}\left[\left(\frac{\text{ArcTan}[x]}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\ x \to 0,\ \text{Direction} \to 1\right]$

Out[1]= $\frac{1}{e^{1/3}}$

In[2]:= $\text{Limit}\left[\left(\frac{\text{ArcTan}[x]}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\ x \to 0,\ \text{Direction} \to -1\right]$

Out[2]= $\frac{1}{e^{1/3}}$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{arc\,\mathrm{tg}\, x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{3}}$$

SOLUCIÓN 6.2

In[3]:= $\text{D}\left[\text{Exp}\left[\frac{x+3}{x+1}\right],\ x\right]$

Out[3]= $e^{\frac{3+x}{1+x}}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{3+x}{(1+x)^2}\right)$

In[4]:= Simplify[%]

Out[4]= $-\frac{2\, e^{\frac{3+x}{1+x}}}{(1+x)^2}$

$$f'(x) = -\frac{2\, e^{\frac{x+3}{x+1}}}{(1+x)^2}$$

SOLUCIÓN 6.3

In[5]:= $D\left[\frac{x+y^2}{x\,y}, \{x, 2\}, \{y, 2\}\right]$

Out[5]= $-\frac{4}{x^2 y^3} + \frac{2\left(-\frac{2}{y} + \frac{2(x+y^2)}{y^3}\right)}{x^3}$

In[6]:= `Simplify[%]`

Out[6]= 0

In[7]:= $\partial_{\{x,2\},\{y,2\}} \frac{x+y^2}{x\,y}$

Out[7]= $-\frac{4}{x^2 y^3} + \frac{2\left(-\frac{2}{y} + \frac{2(x+y^2)}{y^3}\right)}{x^3}$

In[8]:= `Simplify[%]`

Out[8]= 0

$$\frac{\partial^4}{\partial^2 y \partial^2 x}\left[\frac{x+y^2}{xy}\right] = 0$$

SOLUCIÓN 6.4

In[9]:= $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Out[9]= $\frac{\text{ArcSin}[x^2]}{2}$

In[10]:= $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Out[10]= $\sqrt{1+x+x^2} - \frac{5}{2}\,\text{ArcSinh}\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right]$

In[13]:= $\int_0^\infty \text{Exp}[-x]\,\text{Cos}[x]\,dx$

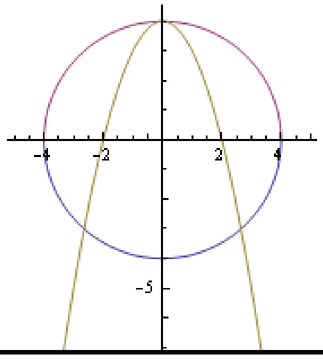
Out[13]= $\frac{1}{2}$

In[14]:= $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}\,dx$

Out[14]= $\frac{1}{6}$

SOLUCIÓN 6.5

In[28]:= Plot[{$-\sqrt{16-x^2}$, $\sqrt{16-x^2}$, $-x^2+4$}, {x, -5, 5}, AspectRatio → Automatic]



A continuación, buscamos los puntos de corte de las curvas para determinar el recinto del área que se debe calcular

In[29]:= Solve[{x^2+y^2 == 16, y == $4-x^2$}, {x, y}]

Out[29]= {{y → -3, x → $-\sqrt{7}$}, {y → -3, x → $\sqrt{7}$}, {y → 4, x → 0}, {y → 4, x → 0}}

Los puntos de corte corresponden a los valores de ordenadas:

$$y = -3,\ y = 4$$

In[30]:= $\int_{-3}^{4}\left(\sqrt{16-y^2}-\sqrt{4-y}\right)dy$

Out[30]= $-\frac{19\sqrt{7}}{6}+4\pi+8\,\text{ArcSin}\left[\frac{3}{4}\right]$

El área del recinto pedido es por tanto:

$$A = -\frac{19\sqrt{7}}{6}+4\pi+8\,\text{arcsen}\,\frac{3}{4} \quad u^2$$

SOLUCIÓN 6.6

```
In[2]:= DSolve[{y''[x] + 2 y'[x] + y[x] == 6 x Exp[- x], y[0] == 1, y'[0] == -2}, y[x], x]
Out[2]= {{y[x] → e^-x (1 - x + x^3)}}
```

La solución particular de la EDO es:

$$y = e^{-x}(1 - x + x^3)$$

SOLUCIÓN 6.7

```
In[4]:=
    ecu = y'''[t] + y'[t] == Sin[t] + 2;

In[5]:= transecu = LaplaceTransform[ecu, t, s] /. {y[0] → 0, y'[0] → 0, y''[0] → 2}
Out[5]= -2 + s LaplaceTransform[y[t], t, s] + s^3 LaplaceTransform[y[t], t, s] == 2/s + 1/(1 + s^2)

In[6]:= sol = Solve[transecu, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[6]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] → (2 + 3 s + 2 s^2 + 2 s^3)/(s^2 (1 + s^2)^2)}}

In[7]:= InverseLaplaceTransform[(2 + 3 s + 2 s^2 + 2 s^3)/(s^2 (1 + s^2)^2), s, t]
Out[7]= 3 + 2 t - 3 Cos[t] - 2 Sin[t] - 1/2 t Sin[t]
```

La solución particular de la EDO es:

$$y = 3 + 2x - 3\cos x - 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$$

A la misma solución hubiésemos llegado considerando:

```
In[8]:=
    ecu = y'''[x] + y'[x] == Sin[x] + 2;

In[9]:= DSolve[{ecu, y[0] == 0, y'[0] == 0, y''[0] == 2}, y[x], x]
Out[9]= {{y[x] → 1/2 (6 + 4 x - 6 Cos[x] - 4 Sin[x] - x Sin[x])}}
```