EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ calcula:

   a) $A+2B$
   b) AB
   c) $2A^2-3A-I$
   d) AA^T
   e) $(2A+BB^T)A^T$
   f) $|A|$

SOLUCIÓN 3.1

2. Calcula A^5 y A^{-5}, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN 3.2

3. Halla una matriz B, tal que $A+B=A^{-1}$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN 3.3

4. Determina los valores del parámetro x para los cuales la matriz A es singular.

$$A=\begin{pmatrix}x & 1 & 0\\ 1 & x & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN 3.4

5. Halla el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & -6\\ 3 & -3 & 9\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN 3.5

6. Calcula el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN 3.6

7. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN 3.7

8. Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$:

$\overline{a}_1=(2,m,0,0)$, $\overline{a}_2=(0,2,m,0)$, $\overline{a}_3=(0,0,2,m)$, $\overline{a}_4=(0,0,0,2)$ y $\overline{b}=(1,1,1,1)$

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales expresado vectorialmente por:

$$x_1\overline{a}_1+x_2\overline{a}_2+x_3\overline{a}_3+x_4\overline{a}_4=\overline{b}$$

a) Clasificarlo según los distintos valores del parámetro real m.

b) Para $m=0$ resolver el sistema.

SOLUCIÓN 3.8

SOLUCIÓN 3.1

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix};$$

```
a + 2 * b
```

```
{{-6, 4} + {1, 0, 2}, {0, 2} + {2, -1, 3}, {14, 8} + {4, 1, 8}}
```

Las matrices A y B son de distinto orden y por lo tanto no se pueden sumar

```
a.b
```

```
{{11, 10}, {15, 15}, {44, 41}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 15 & 15 \\ 44 & 41 \end{pmatrix}$$

```
2 * a.a - 3 * a - IdentityMatrix[3]
```

```
{{14, 4, 30}, {18, 10, 41}, {64, 11, 125}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 30 \\ 18 & 10 & 41 \\ 64 & 11 & 125 \end{pmatrix}$$

```
a.Transpose[a]
```

```
{{5, 8, 20}, {8, 14, 31}, {20, 31, 81}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 20 \\ 8 & 14 & 31 \\ 20 & 31 & 81 \end{pmatrix}$$

```
(2 * a + b.Transpose[b]).Transpose[a]
```

```
{{-3, 1, -10}, {26, 43, 103}, {157, 227, 634}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -10 \\ 26 & 43 & 103 \\ 157 & 227 & 634 \end{pmatrix}$$

```
Det[a]
```

```
1
```

SOLUCIÓN 3.2

In[1]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

In[2]:= MatrixForm[MatrixPower[a, 5]]

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

In[3]:= MatrixForm[MatrixPower[a, - 5]]

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

In[4]:= MatrixForm[MatrixPower[a, n]]

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} n (1+n) & n & 1 \end{pmatrix}$$

In[5]:= MatrixForm[MatrixPower[a, - n]]

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} (-1+n) n & -n & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN 3.3

In[2]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$;

In[3]:= Solve[a + b == Inverse[a]]

Out[3]= {{t → -3, x → 3, y → -6, z → -2}}

La matriz es B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN 3.4

In[1]:= $a = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

In[2]:= `Solve[Det[a] == 0]`

Out[2]= $\{\{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$

SOLUCIÓN 3.5

In[3]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

In[4]:= `MatrixRank[a]`

Out[4]= 1

In[5]:= `MatrixRank[b]`

Out[5]= 2

SOLUCIÓN 3.6

In[6]:= $a = \begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$;

In[7]:= `Det[a]`

Out[7]= $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$

SOLUCIÓN 3.7

In[9]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

In[10]:= LinearSolve[a, b]

Out[10]= {{-1}, {1}, {0}}

In[11]:= NullSpace[a]

Out[11]= {{2, 1, 1}}

La solución x = -1, y = 1, z = 0 no es única

In[12]:= Solve[{x + 2 y - 4 z == 1, 2 x + y - 5 z == -1, x - y - z == -2}]

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[12]= {{x → -1 + 2 z, y → 1 + z}}

Las soluciones del sistema son x = -1 + 2 z, y = 1 + z, z ∈ ℝ

SOLUCIÓN 3.8

In[17]:= $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Solve[Det[a] == 0]

Out[18]= {}

El sistema es Compatible Determinado ∀ m ∈ ℝ

In[21]:= LinearSolve[a, b]

Out[21]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{2-m}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{8}\left(4-2m+m^2\right)\right\}, \left\{\frac{1}{16}\left(8-4m+2m^2-m^3\right)\right\}\right\}$

In[22]:= % /. m → 0

Out[22]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$