Atebikoak, 4. ariketa

Atebiko baten $\underline{Z}$ parametroak zehazteko, ondoko saiakuntza biak egin zaizkio:

- **Hutsean egindako saiakuntza: Atebikoa lehenengo atetik elikatzen da bigarrena zirkuitu irekian utziz.**
- **Zirkuitulaburrean egindako saikuntza: Bigarren atetik elikatzen da atebikoa, lehen atea zirkuitu irekian utziz.**

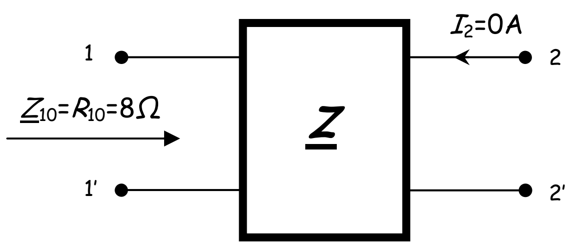
Aipatutako saiakuntzetatik lortutako emaitzak hauexek dira:

Hutsean egindako saiakuntza: $\underline{Z}_{10}=R_{10}= 8\Omega$

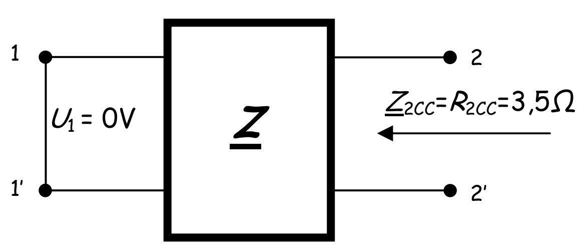
Zirkuitulaburrean egindako saiakuntza: $\underline{Z}_{2CC}=R_{2CC}= 3,5\Omega$

Baldintza horietan zehaztu:

1. **Atebikoaren inpedantzien matrizea.**
2. **Atebikoaren T baliokidea.**
3. **5Ω-ko sarrerako inpedantzia lortzeko, irteerako atean konektatu beharreko inpedantziaren balioa.**
4. **Zirkuituak potentzia maximoa transferi diezaion, irteerako atean konektatu beharreko inpedantziaren balioa. Zehaztu, era berean, aipatutako potentzia maximo horren balioa, baldin eta sarreran $E_g=24_{\angle 0°}V$ eta $R_g=4\Omega$ balioko tentsio iturri erreal bat konektatzen bada.**



1. irudia: Hutsean egindako saiakuntza



2. irudia: Zirkuitulaburrean egindako saiakuntza.

EBAZPENA:

1 Inpedantzien matrizea.

$$\begin{cases}\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{cases}$$

Atebikoa simetriko eta elkarrekikoa dela dakigunez, orduan:

$$\begin{cases}\underline{z}_{11} = \underline{z}_{22}\\ \text{eta}\\ \underline{z}_{21} = \underline{z}_{12}\end{cases}$$

Definizio ekuazioa modu honetan definiturik geratuko dira: $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 & (1) \\ \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 & (2) \end{cases}$

Hutsean egindako saiakuntzatik:

$$\underline{z}_{10} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = 8\Omega \quad (3)$$

Bestetik, zirkuitulaburrean egindako saiakuntzatik, badakigu:

$$\underline{z}_{2CC} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 3{,}5\Omega \quad (4)$$

(1) definizio-ekuazioan, hutsezko baldintzak ezartzen baditugu, $\underline{z}_{11}$-en balioa ebatz daiteke:

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \xrightarrow{\underline{I}_2=0} \underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 \quad \rightarrow \underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

(3) ekuazioan lortu den erlazio berdina delarik: Lehen ateko tentsioa zati lehen ateko korrontea, bigarren ateko korrontea nulua denean. Adierazpena berdinak badira, orduan:

$\underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = 8\Omega$ dela ondoriozta daiteke.

Modu berean lan eginez, (1) definizio ekuaziora zirkuitulaburreko saiakuntzaren baldintza ($\underline{U}_1$=0) eramaten bada:

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \xrightarrow{\underline{U}_1=0} \quad 0 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \rightarrow \underline{I}_1 = -\frac{\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{11}}\cdot\underline{I}_2$$

Aurreko erlazioa (2) definizio ekuaziora eramaten da:

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 \quad (2) \quad \rightarrow \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\left(-\frac{\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{11}}\cdot\underline{I}_2\right) + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 = \underline{I}_2\left(\underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}}\right)$$

Azken erlazioan, bigarren ateko tentsioa bigarren ateko korronteaz zatituz gero, (4) ekuazioa lortuko dugu. Eta bi adierazpenak berdinduz inpedantzien parametroen arteko erlazioa bat lortuko dugu:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \left(\underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}}\right)$$

$$\underline{z}_{2CC} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 3{,}5\Omega \quad (4)$$

$$\underline{z}_{11}-\frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}}=3{,}5\rightarrow \underline{z}_{11}^2-\underline{z}_{21}^2-3{,}5\underline{z}_{11}=0$$

$\underline{z}_{11}$=8 Ω dela dakigunez:

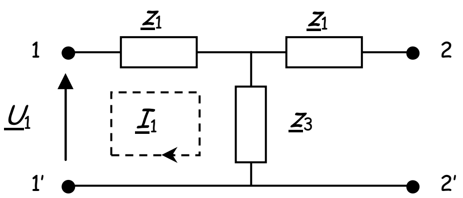
$$\underline{z}_{11}^2-\underline{z}_{21}^2-3{,}5\underline{z}_{11}=0$$
$$8^2-\underline{z}_{21}^2-3{,}5\cdot 8=0\rightarrow \underline{z}_{21}=\sqrt{64-28}=\sqrt{36}=\pm 6\Omega$$

Zenbaki konplexua denez, osagai errealaren balio positiboa hartuko dugu soilik.
Atebikoaren inpedantzien matrizea hauxe izango da:

$$[\underline{Z}]=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & 8\end{bmatrix}\quad \text{eta bere definizio ekuazioak:}\quad \begin{cases}\underline{U}_1=8\cdot\underline{I}_1+6\cdot\underline{I}_2 & (1)\\ \underline{U}_2=6\cdot\underline{I}_1+8\cdot\underline{I}_2 & (2)\end{cases}$$

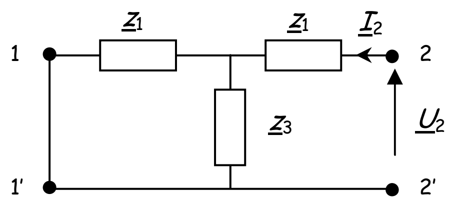
Inpedantzien matrizea lortzeko beste era bat: T baliokidea erabiliz. Atebikoa elkarrekikoa eta simetrikoa denez, bere T baliokideak, balio bereko luzetarako inpedantziak edukiko ditu. $\underline{z}_1$ izenaz izendatuko duguna, zeharretarakoa $\underline{z}_3$ izango da.

Hutsean egindako saiakuntza:



$$\underline{z}_{10}=\left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}=8=\underline{z}_1+\underline{z}_3$$

Zirkuitulaburreko saiakuntza:



$$\underline{z}_{2CC}=\left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}=3{,}5=\frac{\underline{z}_1\cdot\underline{z}_3}{\underline{z}_1+\underline{z}_3}+\underline{z}_1$$

$$\frac{\underline{z}_1\cdot\underline{z}_3}{\underline{z}_1+\underline{z}_3}+\underline{z}_1=3{,}5\quad\rightarrow\quad \underline{z}_1\cdot\underline{z}_3+\underline{z}_1\cdot\underline{z}_3+\underline{z}_1^2-3{,}5\underline{z}_1-3{,}5\underline{z}_3=0\quad\rightarrow\quad 2\cdot\underline{z}_1\cdot\underline{z}_3+\underline{z}_1^2-3{,}5\underline{z}_1-3{,}5\underline{z}_3=0$$

Bi ezezaguneko bi ekuazio daukagu, sistema ebatziko dugu jarraian.

Hutsean egindako saiakuntzaren ekuazioan $\underline{z}_3$, $\underline{z}_1$-en arabera ebazten da, eta erlazio hori zirkuitulaburreko saiakuntzako ekuaziora eramaten da:

$$\begin{cases} \underline{z}_3 = 8 - \underline{z}_1 \\ 2\cdot\underline{z}_1\cdot\underline{z}_3 + \underline{z}_1^2 - 3{,}5\underline{z}_1 - 3{,}5\underline{z}_3 = 0 \end{cases}$$

$$2\cdot\underline{z}_1\cdot(8-\underline{z}_1) + \underline{z}_1^2 - 3{,}5\cdot\underline{z}_1 - 3{,}5(8-\underline{z}_1) = 0$$
$$-\underline{z}_1^2 + 16\cdot\underline{z}_1 - 28 = 0$$

Bigarren mailako ekuazioa, ebatziz:

$$\underline{z}_1 = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-28)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-16 \pm 12}{-2} = 14\Omega \text{ edo } 2\Omega$$

$\underline{z}_1$=14 Ω baliorako, $\underline{z}_3$=8-14=-6 Ω, ezinezkoa da, ezin da erresistentzia negatiboa izan.

$\underline{z}_1$=2 Ω baliorako, $\underline{z}_3$=8-2=6 Ω, posiblea den erantzuna.

Behin T baliokidearen parametroak definitu direnean, inpedantzien matrizearen parametroak zehaztu daitezke.

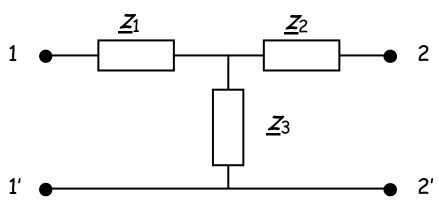
$$\underline{z}_3 = \underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} = 6\Omega$$

$\underline{z}_1 = \underline{z}_{11} - \underline{z}_{12} \quad \rightarrow \quad \underline{z}_{11} = \underline{z}_1 + \underline{z}_{12} = 2 + 6 = 8\Omega$, badakigu ere: $\underline{z}_{11} = \underline{z}_{22} = 8\Omega$ dela

Inpedantzien matrizea hauxe izango da:

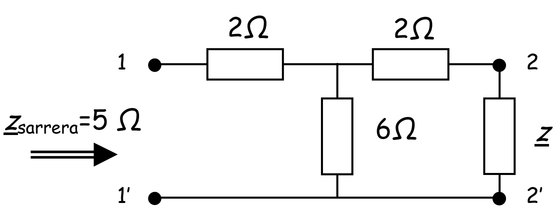
$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

2 Atebikoaren T baliokidea.



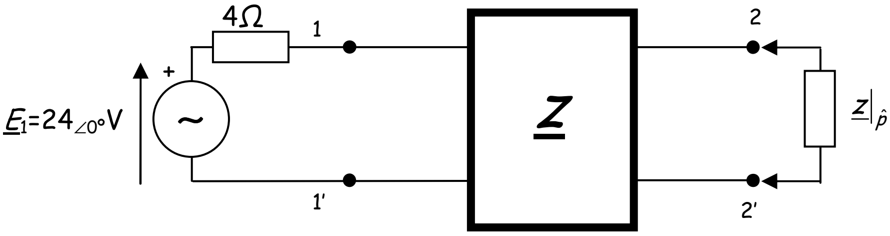
$$\underline{z}_1 = \underline{z}_{11} - \underline{z}_{12} = 8 - 6 = 2\Omega$$
$$\underline{z}_2 = \underline{z}_{11} - \underline{z}_{12} = 8 - 6 = 2\Omega$$
$$\underline{z}_3 = \underline{z}_{12} = 6\Omega$$

3 Sarrerako inpedantzia 5Ω izan dadin, zehaztu $\underline{z}$-ren balioa.



$$\underline{z}_{sarrera} = \frac{(\underline{z}+2)\ \ 6}{\underline{z}+8} + 2 = 5$$
$$6\underline{z} + 12 + 2\underline{z} + 16 - 5\underline{z} - 40 = 0$$
$$3\underline{z} = 12$$
$$\underline{z} = 4\Omega$$

4 Thevenin-en baliokidea.



Thevenin-en tentsioa.

Horrela definitzen da: $\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2\big|_{\underline{I}_2=0}$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = 8\cdot\underline{I}_1 + 6\cdot\underline{I}_2 & (1) \\ \underline{U}_2 = 6\cdot\underline{I}_1 + 8\cdot\underline{I}_2 & (2) \\ \underline{I}_2 = 0 & (5) \\ \underline{U}_1 = 24_{\angle 0^{\circ}} - 4\cdot\underline{I}_1 & (6) \end{cases}$$

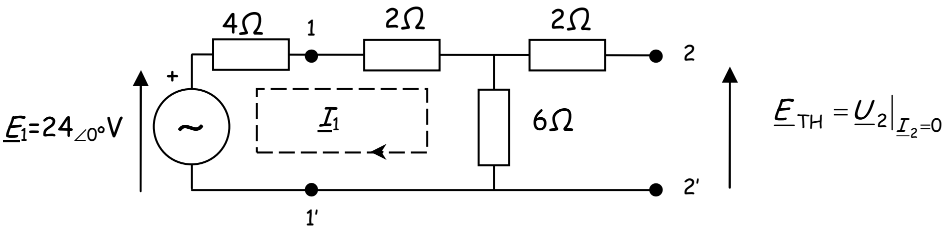
$\underline{I}_2$ eta $\underline{U}_1$-en balioak (1) ekuaziora eramaten baditugu, $\underline{I}_1$ ebatziko dugu:

$$24_{\angle 0^{\circ}} - 4\cdot\underline{I}_1 = 8\cdot\underline{I}_1 \rightarrow \underline{I}_1 = 2A$$

Jarraian, $\underline{I}_2$ eta $\underline{I}_1$-en balioak (2) ekuaziora eramanez, Thevenin-en tentsioa lortuko dugu:

$$\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2 = 6\cdot\underline{I}_1 = 6\cdot 2 = 12V$$

Thevenin-en tentsioa, atebikoaren T baliokidearekin ere lor daiteke:

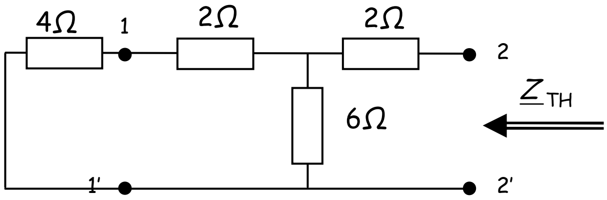


$$\underline{I}_1 = \frac{24_{\angle 0^{\circ}}}{4+2+6} = 2A$$

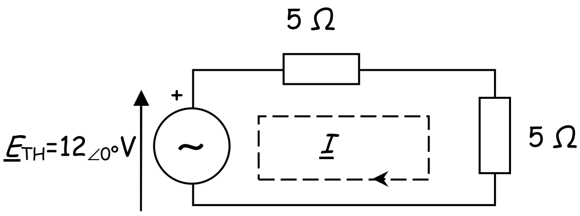
Eta tentsioa 6 Ω- eko erresistentziaren borneen artean dagoen berdina da.

$$\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2\big|_{\underline{I}_2=0} = 6\cdot 2 = 12V$$

Thevenin-en inpedantzia:



$$\underline{Z}_{TH} = \frac{(4+2)\cdot 6}{4+2+6} + 2 = 5\Omega$$



$$\underline{I} = \frac{12}{10} = 1{,}2A$$

$$\hat{P} = 5\cdot \underline{I}^2 = 5\cdot 1{,}2^2 = 7{,}2W$$