5.Gaia: SAREEN OINARRIZKO TEOREMAK

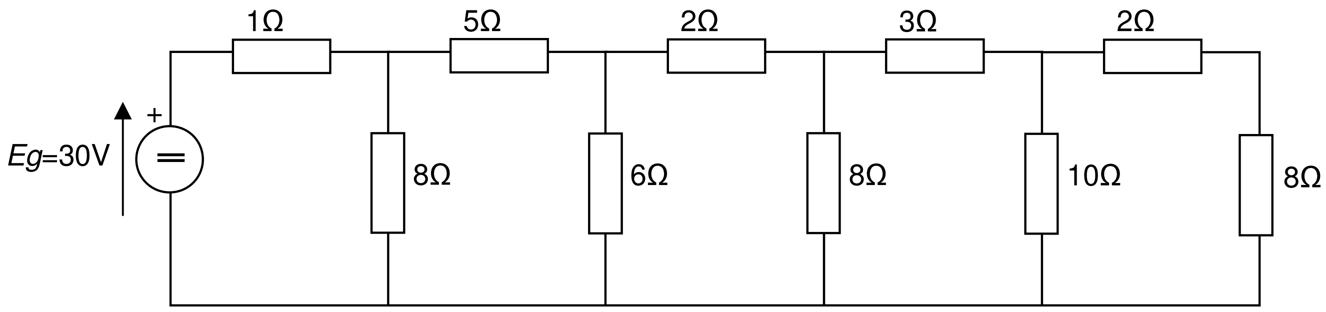
- Teoria zein praktikako kuestioak ebazteko teoremen garrantziaz jabetzea.
- Zirkuitu linealak eta ez linealak bereiztea.
- Zirkuitu bat elkarrekikoa noiz den bereizten jakitea.
- Gainezarmenaren printzipioa sistema linealetan zergatik bakarrik erabil daitekeen ulertzea.
- Izaera ezberdineko iturriak dituzten zirkuitu linealetan gainezarpenaren aplikazioa ezagutzea.
- Ordezkapenaren erregela, zirkuitua moldatzen ez denean baino ezin dela aplikatu onartzea.
- Konpentsazioaren legea aplikatzen deneko kasu errealak ezagutzea.

Linealtasuna:

Zirkuitu linealetan, irteerako seinalea sarrerako seinalearekiko proportzionala da.

Zirkuituaren sarreran konektatutako iturri bakarrez elikatutako eskailera formako zirkuituak ebazteko, zuzenean aplika daiteke printzipio hori.

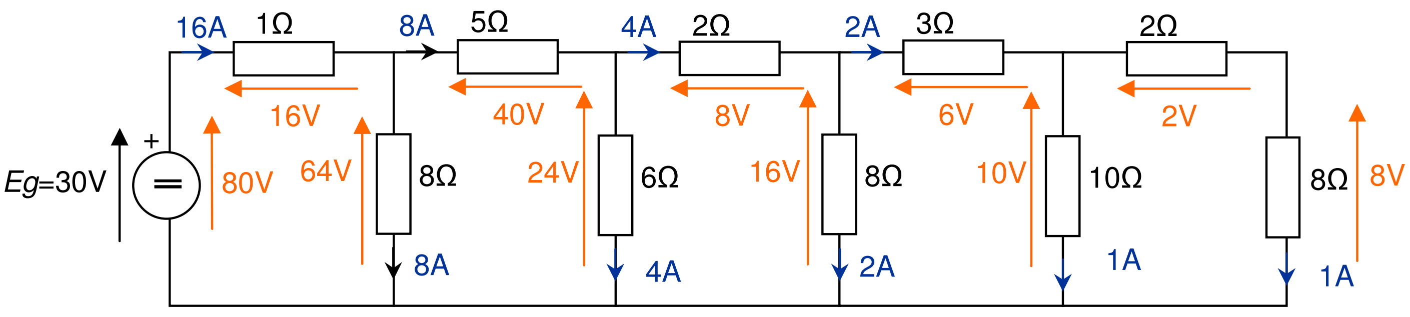
Adibidea:



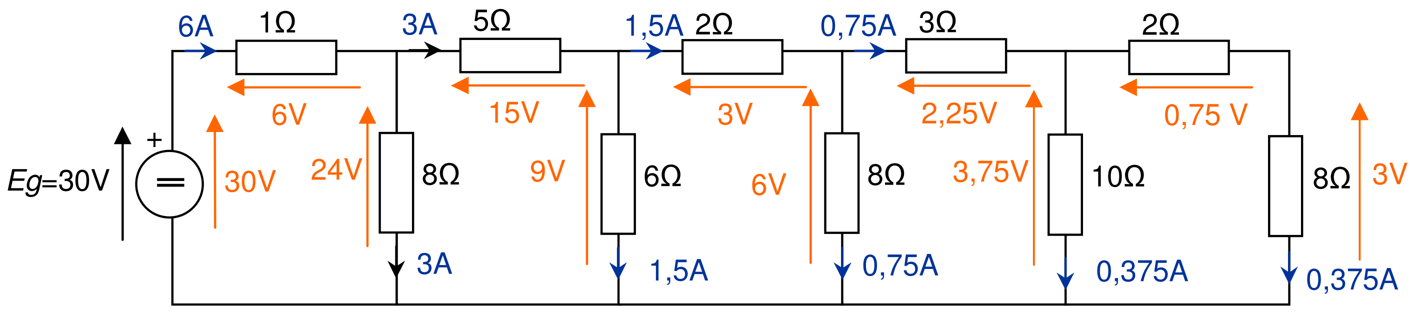
Demagun irteerako seinalea balio unitarioa duela (1A).
Sarrerako seinalearen balioa zehaztuko dugu hautatutako 1A-ko irteerarako.

K konstantearen balioa zehaztuko dugu (emaitzak K konstanteaz bidertuz lortuko dira).

$$\left.\begin{array}{l} 80V \rightarrow 1A \\ 30V \rightarrow K \end{array}\right\} K = \frac{3}{8}$$



$$K = \frac{\text{Irteera}}{\text{Sarrera}} \rightarrow \text{Irteera} = K \cdot \text{Sarrera}$$



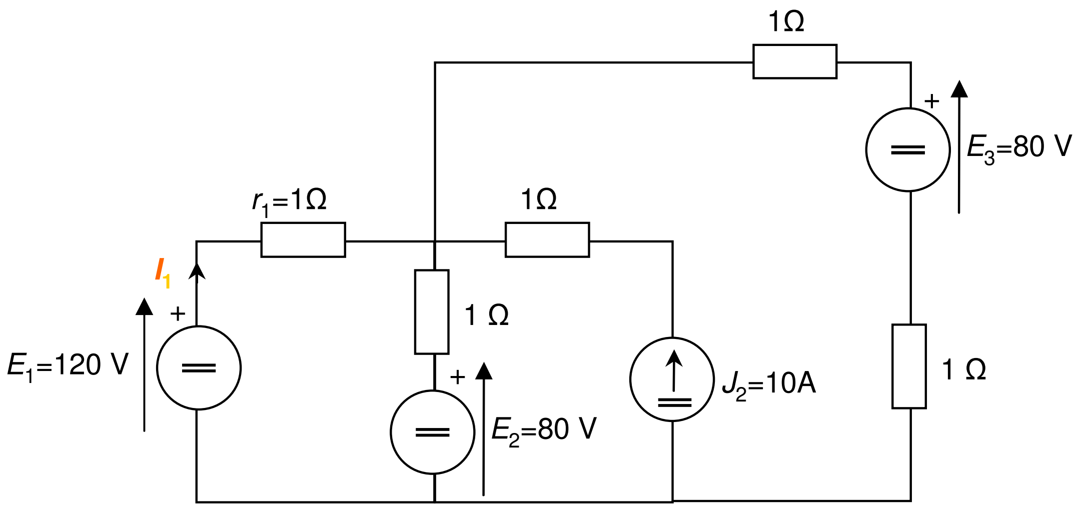
Azken eskema honetan, benetako emaitzak adierazi dira. Aurreko zirkuitukoak K konstanteaz bidertuz, bider 3/8 eginez alegia.

- **Gainezarpena:**

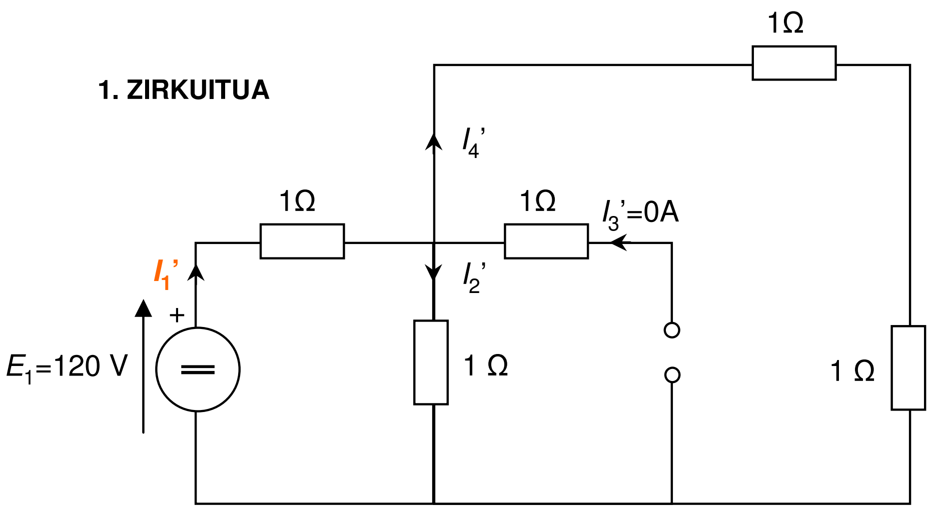
  Zenbait elikadura iturri duen zirkuitu batean lortuko dugun irteera seinalea, beste zenbait seinaleen batura bezala lor daiteke, jatorrizko zirkuitutik lortutako beste zenbait zirkuituen seinaleak batuz, alegia. Zirkuitu horietako bakoitzak iturri guztiak pasibotuta edukiko ditu bat izan ezik.

  Tentsio-iturria pasibotzeko zirkuitulaburtuko dugu. Korronte-iturria, aldiz, zirkuitu irekian utziko dugu.

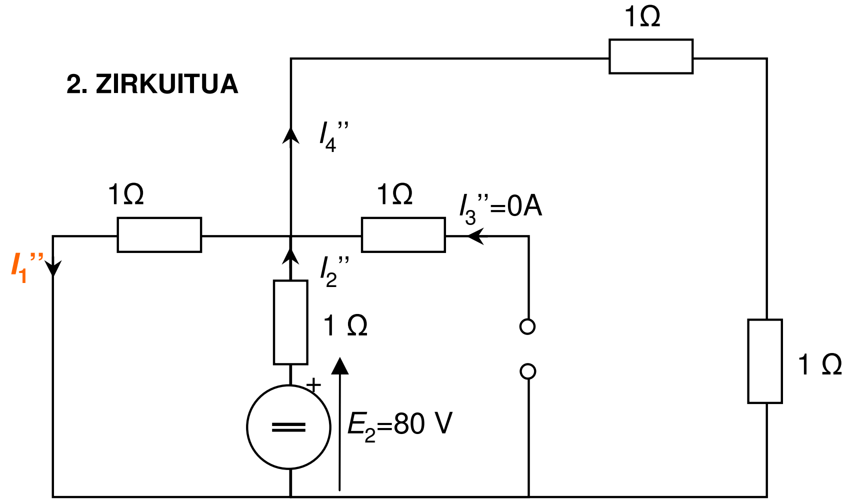
  Adibidea: Irudiko zirkuituan kalkulatu I_1 korrontearen balioa.



5.1 GAINEZARMENA ETA LINEALTASUNA. (4)



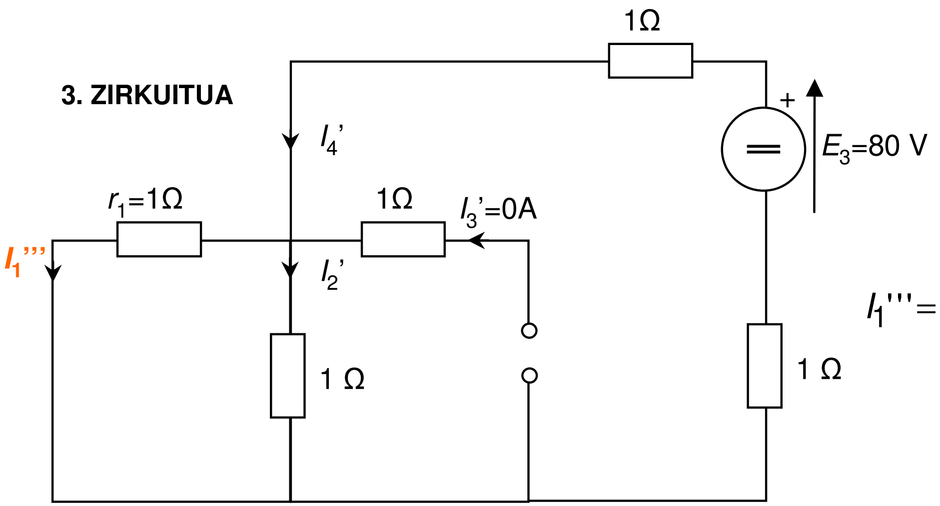
$$I_1' = \frac{120}{1+\frac{1\cdot 2}{1+2}} = 72A$$



$$I_1'' = \frac{80}{1+\frac{2\cdot 1}{2+1}} \cdot \frac{2}{1+2} = 32A$$

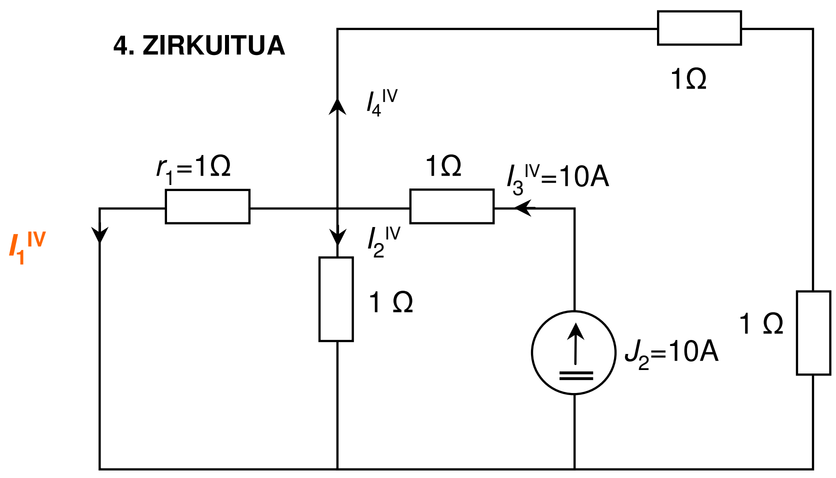
1 ZIRKUITUA: Iturritik ikusitako erresistentzia totala zehazten dugu: 1Ω eta 2 Ω-eko bi erresistentzia paraleloan eta 1Ω-eko beste hirugarren batekin seriean. Iturriko korrontea, iturriko tentsioa zati zirkuituko erresistentzia totala izango da.

2. ZIRKUITUA: Lehen bezala iturriak zirkuituari ematen dion korrontea zehazten da, horretarako E_2 iturritik ikusitako erresistentzia totala zehaztu beharko da. Jarraian, korronte-zatitzailearen formula aplikatuz I_1" zehaztuko dugu. Kontuan izan korronteak zentzuz aldatu dela.



$$I_1''' = \frac{80}{2+\frac{1\cdot 1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 16A$$

3.ZIRKUITUA: 2 zirkuituan egindakoa honetan ere egingo da. Lehenengo zirkuituaren korronte totala zehaztu eta ondoren korronte-zatitzailearen formularen bidez, I_1''' korrontea zehaztuko da.



4 ZIRKUITUA: proportzionaltasunaren propietatea erabiliz ebatziko dugu. I_1^{IV}, I_2^{IV} eta I_4^{IV} korronteen adarrak paraleloan daude. I_1^{IV} eta I_2^{IV} korronteek balio bera dute, adarrek erresistentzia bera dutelako. Eta I_4^{IV}–ren balioa aurrekoen erdia da erresistentzia bikoitza duelako. Datu horiekin ekuazio sistema planteatzen dugu eta bilatzen ari garen I_1^{IV} korrontea ebatzi.

$$\begin{cases} I_1^{IV} = I_2^{IV} \\ I_4^{IV} = \dfrac{I_1^{IV}}{2} \\ I_1^{IV} + I_2^{IV} + I_4^{IV} = 10 \end{cases} \rightarrow I_1^{IV} + I_1^{IV} + \frac{I_1^{IV}}{2} = 10 \rightarrow I_1^{IV} = 4A$$

ERANTZUNA :Lau seinaleen gainezarpenaz:

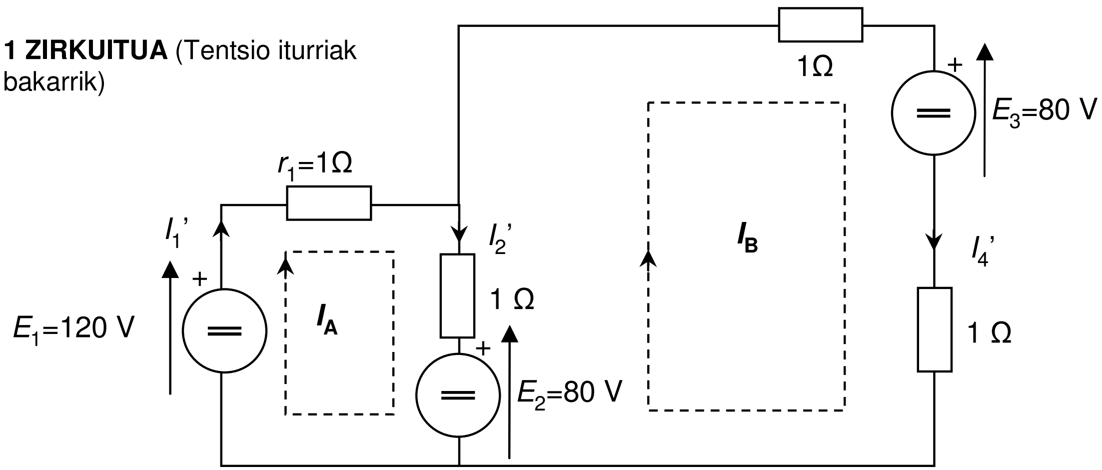
$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' - I_1^{IV} = 72 - 32 - 16 - 4 = 20A$$

5.1 GAINEZARPENA ETA LINEALTASUNA. (6)

Lau zirkuitu gainezarri beharrean (bat iturri bakoitzeko), oso erabilia den beste aukera, bi zirkuituen gainezarpena egitean datza: zirkuitu batek tentsio-iturri denak edukiko ditu eta besteak korronte iturri denak.

Estrategia horrekin, ez dira iturriak eraldatu behar.

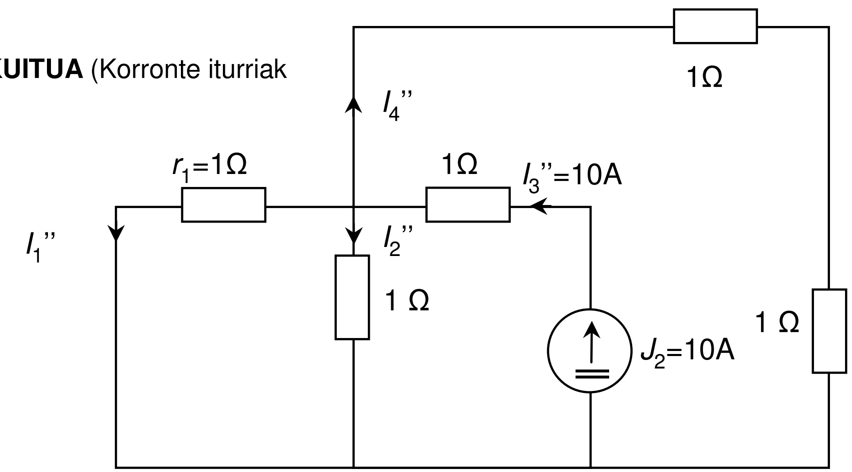
1 ZIRKUITUA (Tentsio iturriak bakarrik)



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120-80 \\ 80-80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_A = I_1' = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{120}{6-1} = 24\text{A}$$

2 ZIRKUITUA (Korronte iturriak soilik)



Lehengo 4. zirkuitua ebatzi dugun bezala ebatziko dugu, izan ere zirkuitu bera da.

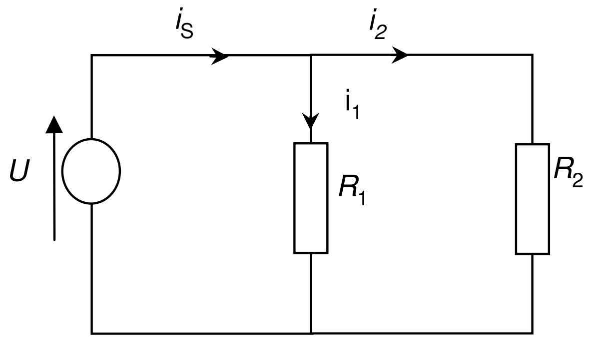
$$\begin{cases} I_1'' = I_2'' \\ I_4'' = \dfrac{I_1''}{2} \\ I_1''+I_2''+I_4'' = 10 \end{cases} \rightarrow I_1''+I_1''+\frac{I_1''}{2} = 10 \rightarrow I_1'' = 4\text{A}$$

EMAITZA Bi seinaleen gainezarpenaz: $I_1 = I_1' - I_1'' = 24 - 4 = 20\text{A}$

- Bakarrik erabiliko dugu, zirkuitu eratorrien ebazpena oso erraza denean.
- Natura edo maiztasun ezberdineko iturriak dauzkagunean, derrigorrez erabili beharko dugu teorema hau.

- Oharra

Aurreko ariketan, bi eta hiru azpi zirkuituak ebazteko, ***korronte-zatitzailea*** erabili dugu, gogora dezagun zertan datzan:

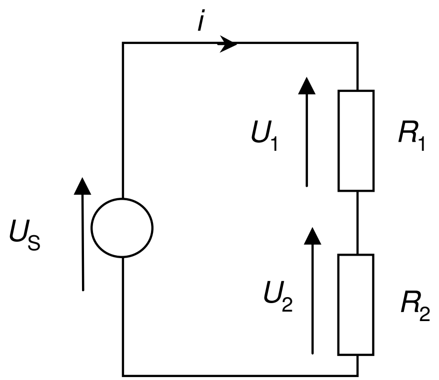


$$U = R_1 \cdot i_1 = i_2 \cdot R_2 = i_S \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = i_S \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = i_S \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Tentsio-zatitzaileaz ere hitz egin dezakegu:

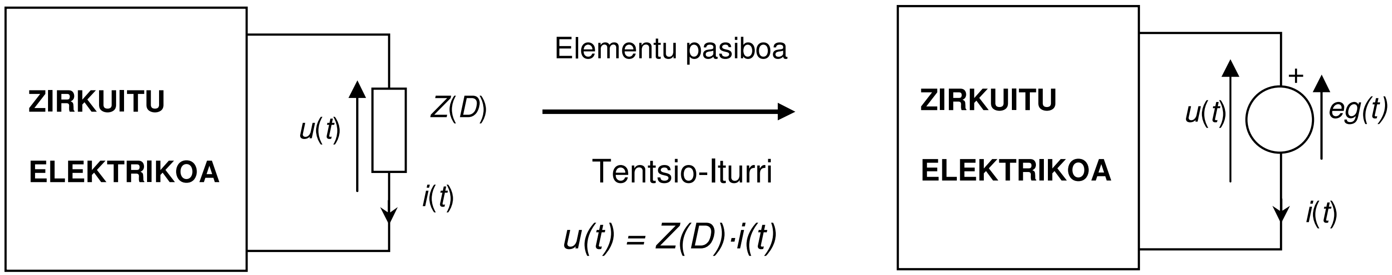


$$U_S = R_1 \cdot i + i \cdot R_2 \quad \text{edo} \quad i = \frac{U_S}{R_1 + R_2}$$

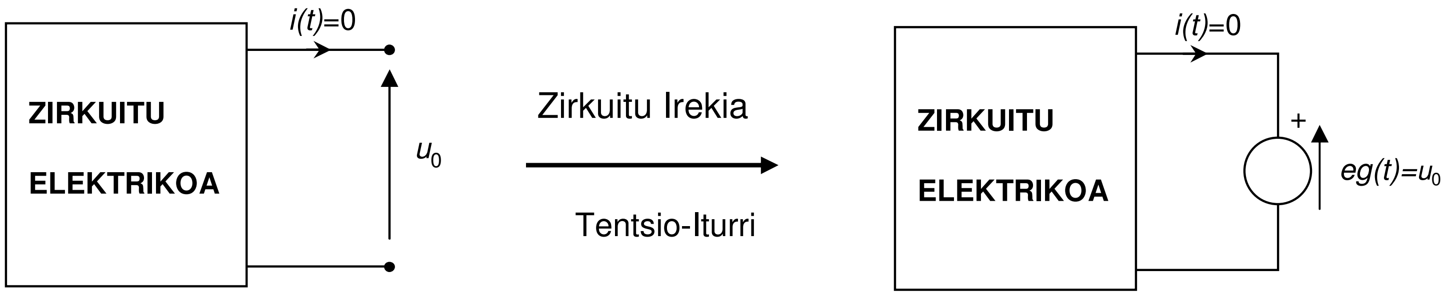
$$U_1 = R_1 \cdot i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_S$$

$$U_1 = R_2 \cdot i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

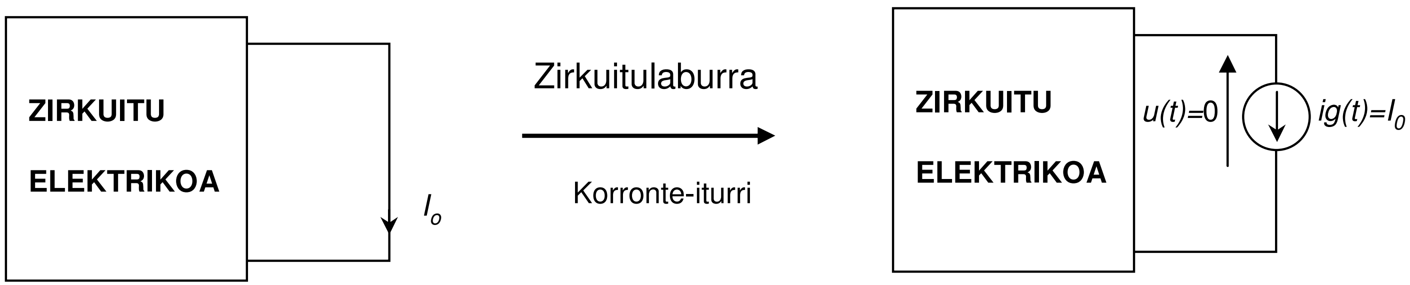
Elementu pasibo baten muturretan $u(t)=Z(D)\cdot i(t)$ edo $i(t)=Y(D)\cdot u(t)$ erlazioetako bat ezagutzen badugu, elementua $u(t)$ baliodun tentsio-iturri batez edo $i(t)$ baliodun korronte-iturri batez ordeztu dezakegu, izan ere, Kirchhoff-en legeak zirkuituan aplikatuz gero definizio ekuazioak ez dira aldatuko; Elikadura iturri horiek mendeko iturriak izango dira.



Elementu pasiboaren borneen arteko tentsioaren balio bereko tentsio-iturri batez ordezten da elementu pasiboa. Baina korrontea zirkuitu bietan berdina izan beharko da.



Zirkuitu irekiaren borneen arteko tentsioaren balioa duen tentsio-iturri batez ordezten da zirkuitu irekia. Korrontea nulua da zirkuitu bietan.

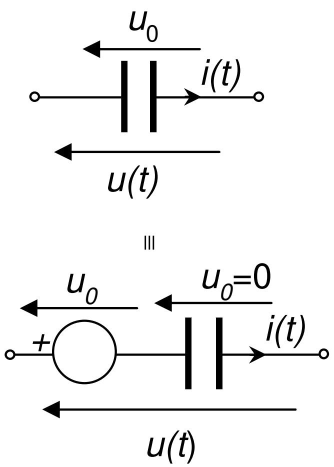


Zirkuitulaburraren korrontearen balio bereko korronte-iturri batez ordezten da zirkuitulaburra. Tentsioaren balioa zirkuitu bietan nulua da.

Ikus daiteke zelan, elementua tentsio-iturri batez ordeztu denean, korronteak balio zehatz bat hartu behar duela eta korronte iturri batez ordeztean tentsioa da balio zehatz bat izan behar duena. Enuntziatua horretaz ari da mendeko iturriak aipatzen dituenean.

Erregela hau erabil daiteke, hasierako egoeran karga duten kondentsadoreak eta harilak adierazteko. Ikus dezagun:

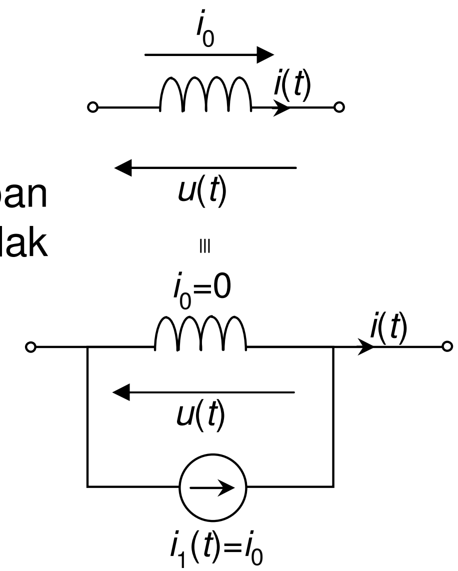
a) Hasieran karga duen kondentsadorearen kasua :



Aurretik karga duen kondentsadoreak bere borneen artean u_0 tentsioa dauka. u_o balioko tentsio-iturri ideal bat eta berarekiko seriean karga gabeko kondentsadore batez ordeztuko da, eta taldearen jokabidea karga duen kondentsadorearen jokabide bera izango da.

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\mathrm{d}t = u_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\mathrm{d}t$$

b) Hasierako karga duen harilaren kasua:

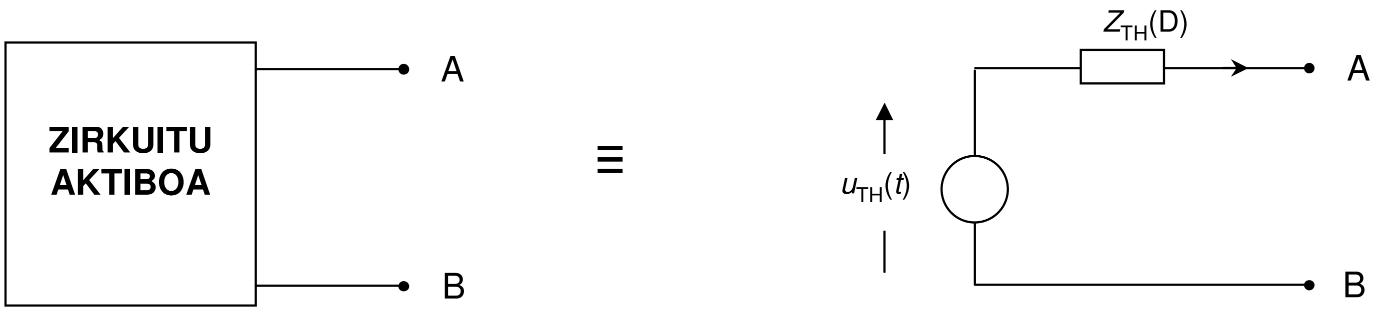


Aurretik kargatutako harila, karga gabeko haril batez eta berarekiko paraleloan korronte-iturri ideal batez ordeztu daiteke, non iturriaren korrontea harilak zeukana den.

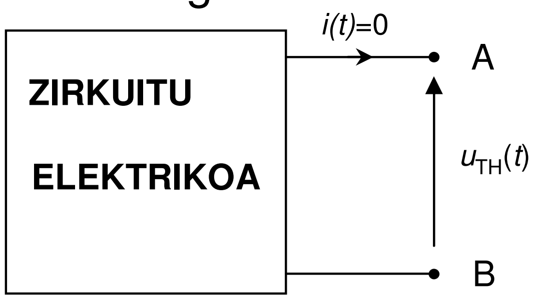
Zirkuitu biek ekuazio bera betetzen dute

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(t)\mathrm{d}t = i_0 + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(t)\mathrm{d}t$$

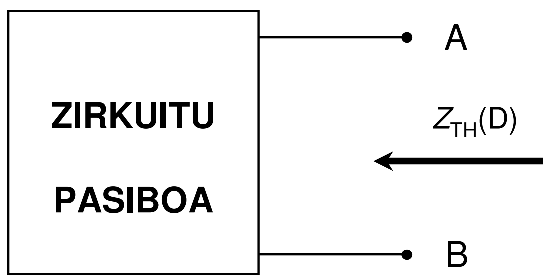
Zirkuitu aktibo baten bi terminalen arteko zirkuitu baliokidea, Thevenin-en arabera, dipoloaren bi terminalen artean jarritako tentsio-iturriak eta horrekiko seriean jarritako inpedantzia batek osatuko dute.



Tentsio iturriaren balioa $u_{TH}(t)$: dipoloaren borneen artean, zirkuitua irekita dagoenean, agertzen den tentsioa izango da.



Z_{TH}(D) inpedantzia: dipoloaren borneen artean dagoen sarrerako inpedantzia izango da. Kalkulatzeko, iturriak pasibotu beharko ditugu (tentsio iturriak zirkuitulaburtu eta korronte iturriak zirkuitu irekian utzi).

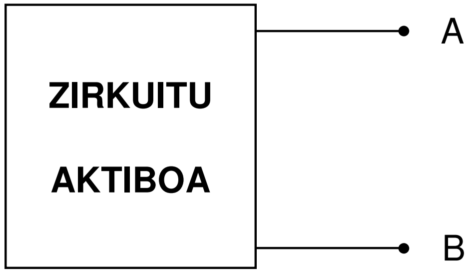


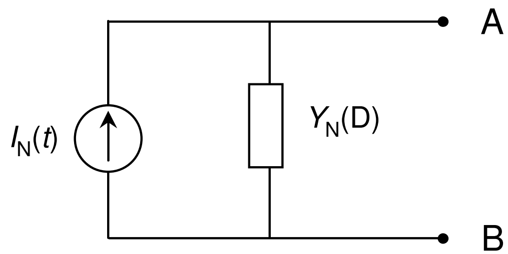
•Zirkuituan mendeko iturriak badaude, dipoloaren borne bien artean edozein *u(t)* tentsio aplikatu eta A eta B-ren arteko *i(t)* korrontearen balioa zehazten da. Jarraian Z_{TH}(D) lortzeko adierazpen hauxe erabiliko da: $u(t)/i(t)$

•A eta B-ren (borne horiekiko ari gara baliokidea kalkulatzen) alde bietara dauden zirkuitu zatien artean lotura magnetikoak badaude, ezin da Thevenin aplikatu.

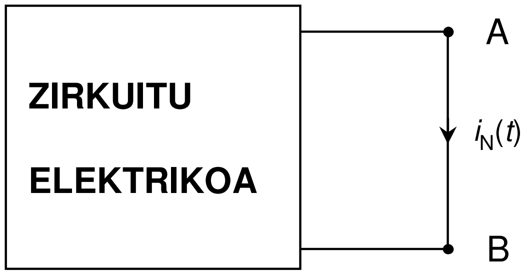
5.4 NORTON-EN TEOREMA. (1)

Bipolo (bi borne eskuragarri dituen zirkuitu elektrikoa) aktibo baten zirkuitu baliokidea, Nortonen arabera, korronte iturri ideal batek eta horrekiko paraleloan jarritako admitantzia batek osatuko dute.

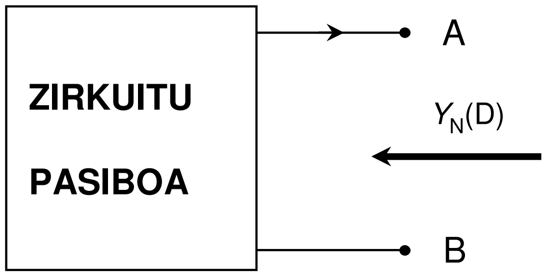




Korronte iturriaren balioa $i_N(t)$, bipoloaren borneen artean zirkuitulaburrean dagoen korrontea izango da, noranzkoa mantenduz.

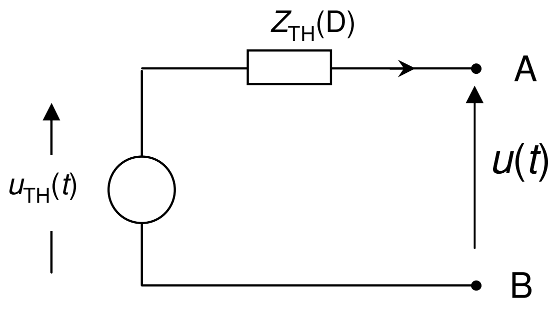


Admitantziaren balioa $Y_N(D)$, zirkuituko sarrerako admitantzia da zirkuitua pasiabotu denean.

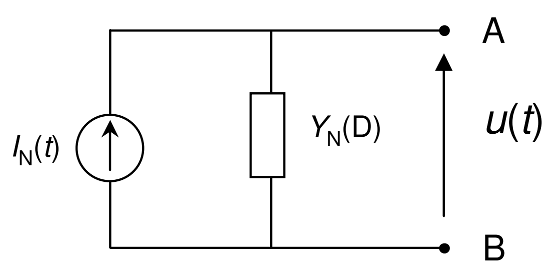


Bipolo berean Norton eta Thevenin-en teoremak aplikatuz gero, lortuko ditugun zirkuitu biak, baliokideak izango dira, ikus dezagun:

a) Baliokide biak zirkuitu irekian:



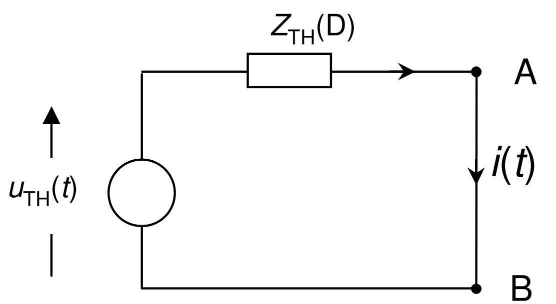
$$u(t) = u_{TH}(t)$$



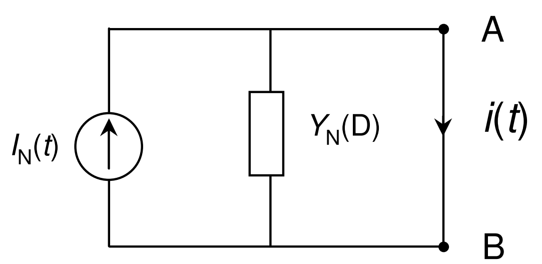
$$u(t) = \frac{i_N(t)}{Y_N(D)}$$

$$u_{TH}(t) = \frac{i_N(t)}{Y_N(D)} \quad (1)$$

b) Baliokide biak zirkuitulaburtuz:



$$i(t) = \frac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)}$$



$$i(t) = i_N(t)$$

$$i_N(t) = \frac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)} \quad (2)$$

Zirkuitu bien parametroen arteko erlazioak

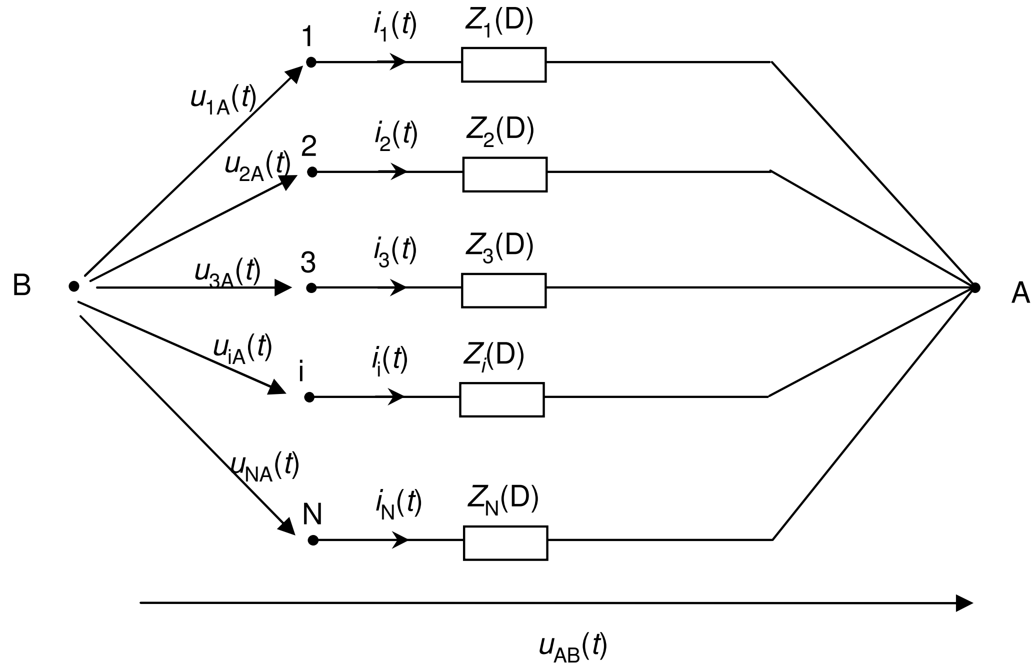
(1) eta (2) adierazpenetatik $u_{TH}(t) = \dfrac{i_N(t)}{Y_N(D)} = \dfrac{\dfrac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)}}{Y_N(D)} \rightarrow 1 = Z_{TH}(D) \cdot Y_N(D)$ $\longrightarrow$

$$Z_{TH}(D) = \frac{1}{Y_N(D)}$$

$$Y_N(D) = \frac{1}{Z_{TH}(D)}$$

$$Z_{TH}(D) = \frac{u_{TH}(t)}{i_N(t)}$$

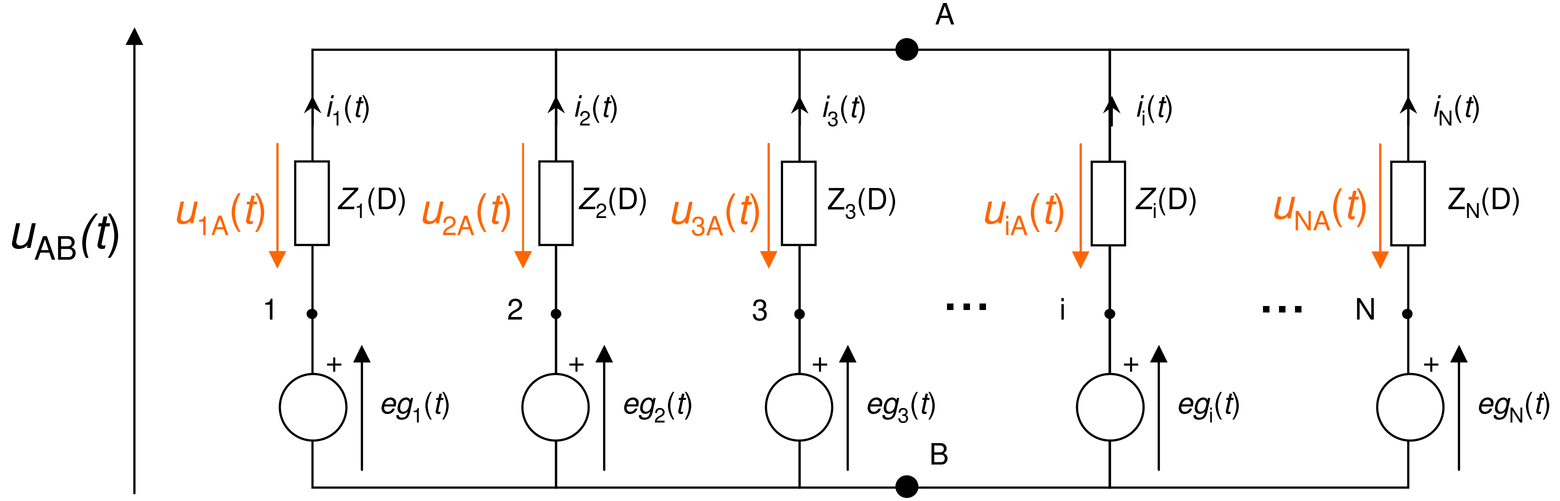
Teorema honi esker, zirkuitu baten A eta B bi korapiloen arteko tentsioa, $u_{AB}(t)$ ezagutzeko, nahiko da B korapiloan bat datozen adarretako inpedantziak ezagutzea eta A puntuan bat datozen adarretako tentsioak ezagutzea.



Demostraziorako zirkuitua komeni zaigunaren arabera txukuntzearren, ordezkapenaren erregela erabiliz, zirkuitua moldatuko dugu:

- Adarretako inpedantziak tentsio-iturriez ordeztuko ditugu (ordezkapenaren erregela).
- Irudikatu ditugun tentsioak aldiz inpedantziez ordeztuko dira (ordezkapenaren erregela).

5.5 MILLMAN-EN TEOREMA. (2)



K2L adar bakoitzean:

$$u_{1A}(t) = e_{g1}(t) - u_{AB}(t)$$
$$u_{2A}(t) = e_{g2}(t) - u_{AB}(t)$$
$$u_{3A}(t) = e_{g3}(t) - u_{AB}(t)$$
....
$$u_{iA}(t) = e_{gi}(t) - u_{AB}(t)$$
....
$$u_{NA}(t) = e_{gN}(t) - u_{AB}(t)$$

Ohm-en legea adar bakoitzeko inpedantzian

$$i_1(t) = \frac{u_{1A}(t)}{Z_1(D)} = Y_1(D)\cdot u_{1A}(t)$$
$$i_2(t) = \frac{u_{2A}(t)}{Z_2(D)} = Y_2(D)\cdot u_{2A}(t)$$
$$i_3(t) = \frac{u_{3A}(t)}{Z_3(D)} = Y_3(D)\cdot u_{3A}(t)$$
....
$$i_i(t) = \frac{u_{iA}(t)}{Z_i(D)} = Y_i(D)\cdot u_{iA}(t)$$
....
$$i_N(t) = \frac{u_{NA}(t)}{Z_N(D)} = Y_N(D)\cdot u_{NA}(t)$$

K1L A korapiloan:

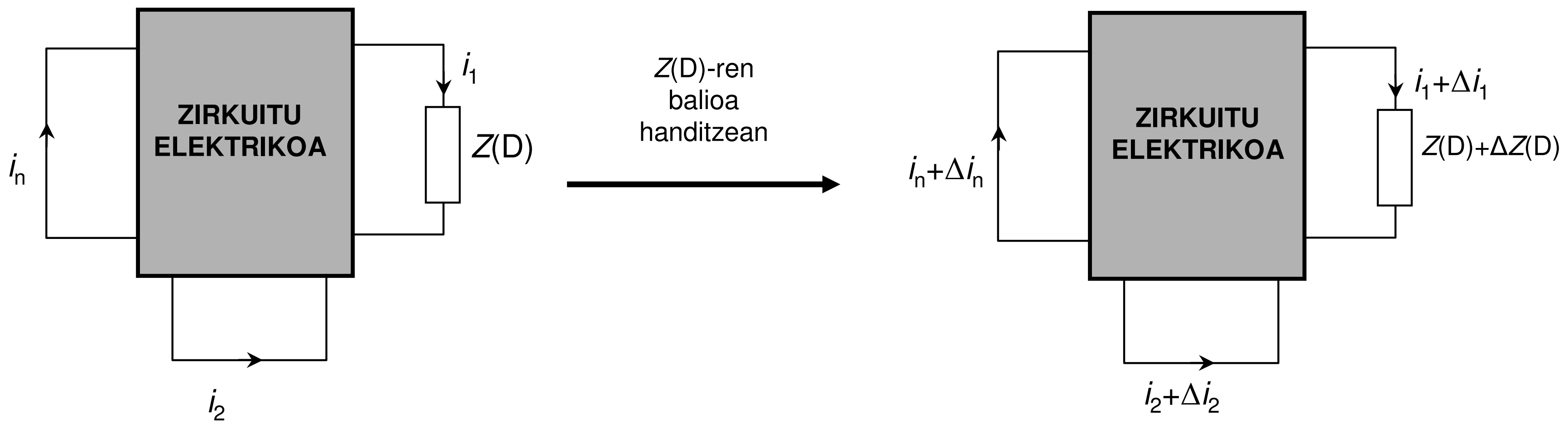
$$i_1(t) = Y_1(D)\cdot\left(e_{g1}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_1(D)\cdot e_{g1}(t) - Y_1(D)\cdot u_{AB}(t)$$
$$i_2(t) = Y_2(D)\cdot\left(e_{g2}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_2(D)\cdot e_{g2}(t) - Y_2(D)\cdot u_{AB}(t)$$
$$i_3(t) = Y_3(D)\cdot\left(e_{g3}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_3(D)\cdot e_{g3}(t) - Y_3(D)\cdot u_{AB}(t)$$
....
$$i_i(t) = Y_i(D)\cdot\left(e_{gi}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_i(D)\cdot e_{gi}(t) - Y_i(D)\cdot u_{AB}(t)$$
....
$$i_n(t) = Y_n(D)\cdot\left(e_{gn}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_n(D)\cdot e_{gn}(t) - Y_n(D)\cdot u_{AB}(t)$$
– –

$$\sum_{i=1}^{n} i_i(t) = 0 = \sum_{i=1}^{n} Y_i(D)\cdot e_{gi}(t) - u_{AB}(t)\cdot\sum_{i=1}^{N} Y_i(D) \Rightarrow u_{AB}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i(D)\cdot e_{gi}(t)}{\sum_{i=1}^{n} Y_i(D)}$$

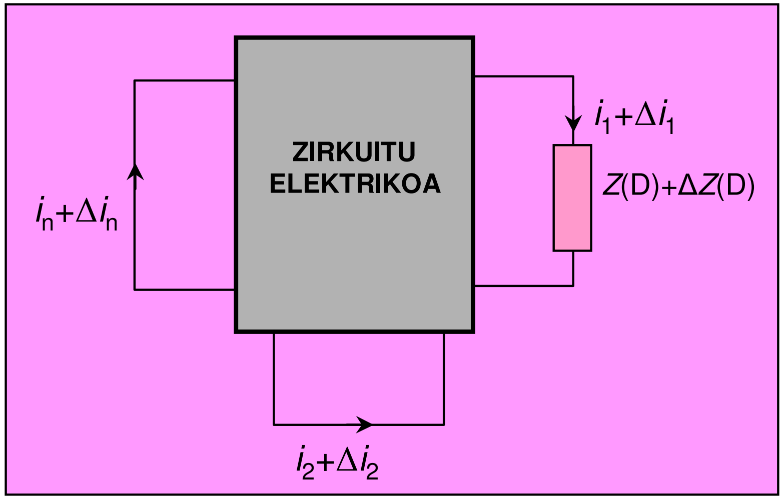
Ordezkapenaren erregela behin eta berriz aplikatuz sortzen den teoremari esker, zirkuitu elektriko bateko adar batean elementu pasibo baten balioa aldatzen dugunean zirkuituak pairatzen dituen intentsitate aldakuntzak erraz ezagutu ahal izango ditugu.

- Oso erabilgarria da proiektatzen ari garen zirkuitu batean elementuen tolerantzien eraginak ikertzeko, tolerantziek korronteen kalkuluetan sortarazten dituzten erroreak ikertzeko, alegia.
- Teoremarekin zirkuitu batetako inpedantzia baten balioa aldatzen dugunean zirkuituko adar ezberdinek zer nolako korronte aldakuntza pairatzen duten kalkula daiteke, eta iterazioak eginez diseinu-inpedantzia behar bezala kalkulatzen lagunduko digu.

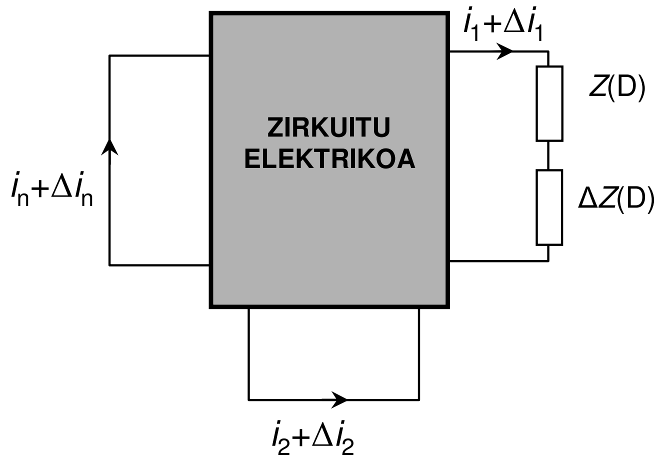
GARAPENA:



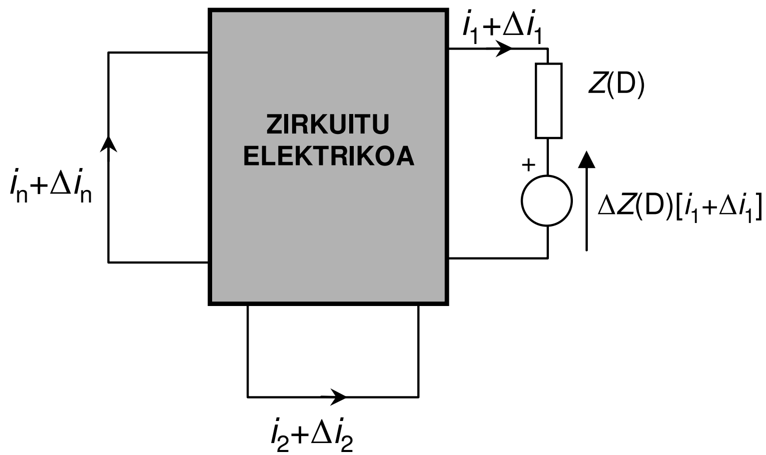
5.6 KONPENTSAZIOAREN TEOREMA(2)



1 $Z(D)$ eta $\Delta Z(D)$ seriean konektatutako bi inpedantzietan bereizten dira.

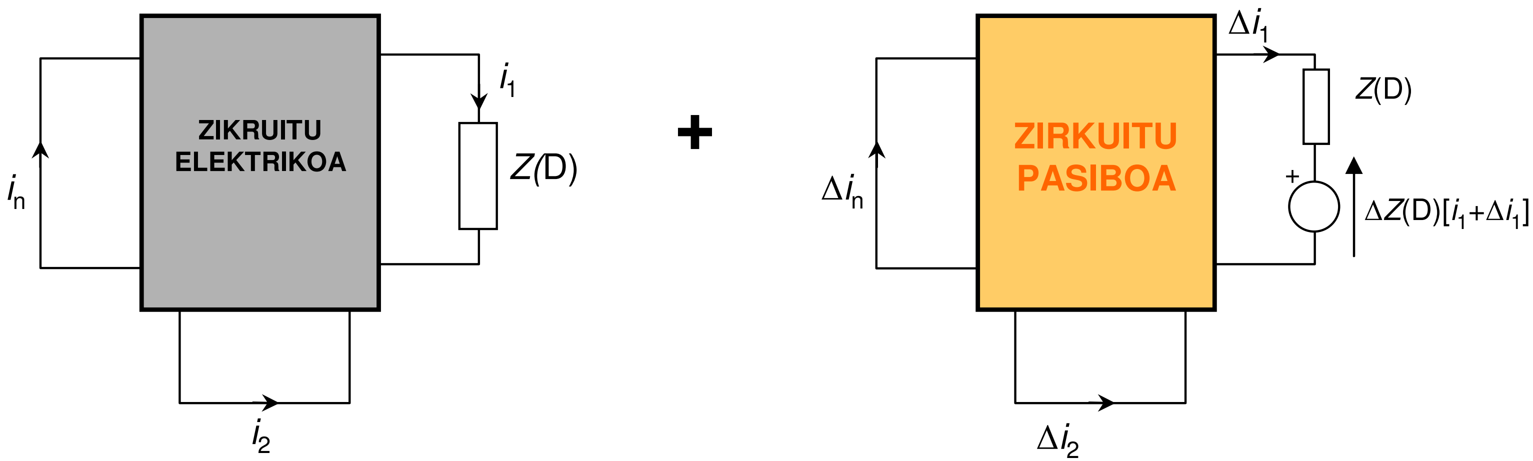


2 Ordezkapen erregela aplikatzen badugu $\Delta Z(D)$elementuan, $\Delta Z(D)(i_1+\Delta i_1)$ baliodun iturria agertuko zaigu eraldatutako adarrean :



3

Gainezarpenaren teorema aplikatuko dugu:
Alde batetik $\Delta Z(\mathrm{D})(i_1+\Delta i_1)$ balioko iturria izan ezik beste guztiak dituen zirkuitua aztertuko dugu, hasierako zirkuitua alegia. Eta bestetik bakarrik $\Delta Z(\mathrm{D})(i_1+\Delta i_1)$ iturria daukan zirkuitua.



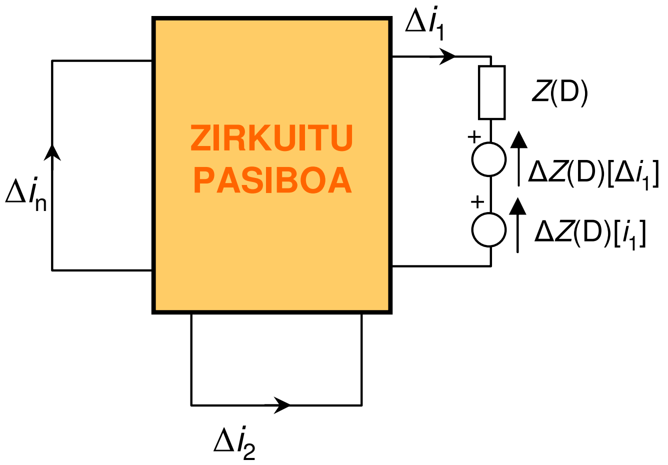
Hasierako Zirkuitua

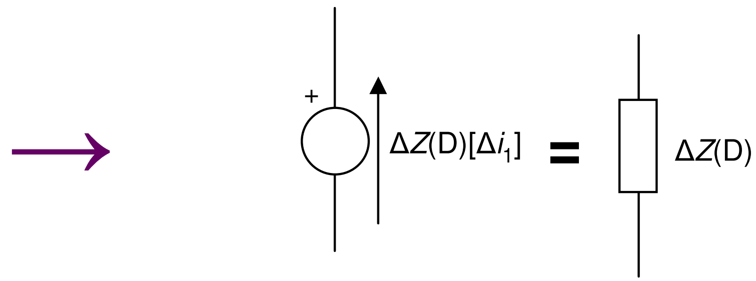
Zirkuitu pasiboa, elementu aktibo bakartzat, ordezkapen erregelarekin lortu dugun elikadura iturria $\Delta Z(\mathrm{D})(i_1+\Delta i_1)$ duena.

Iturria seriean dauden bi iturritan bana dezakegu:
$\Delta Z(\mathrm{D})(i_1+\Delta i_1)=\Delta Z(\mathrm{D})\cdot i_1+\Delta Z(\mathrm{D})\cdot\Delta i_1$

5.6 KONPENTSAZIOAREN TEOREMA (4)

4

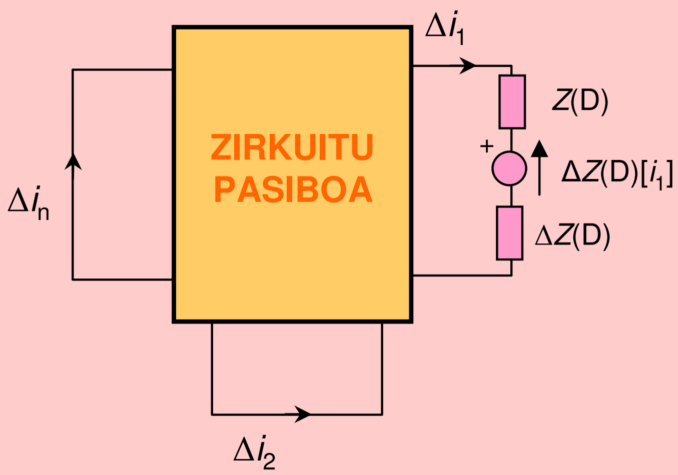




Ordezkapenaren erregela atzekoz aurrera aplikatuz.

5

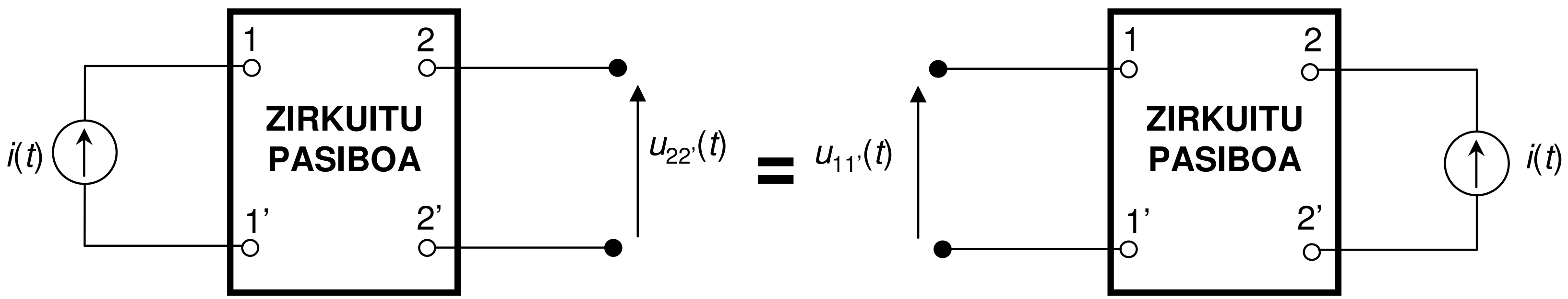
Azkenean ebatzi beharko den zirkuitua:



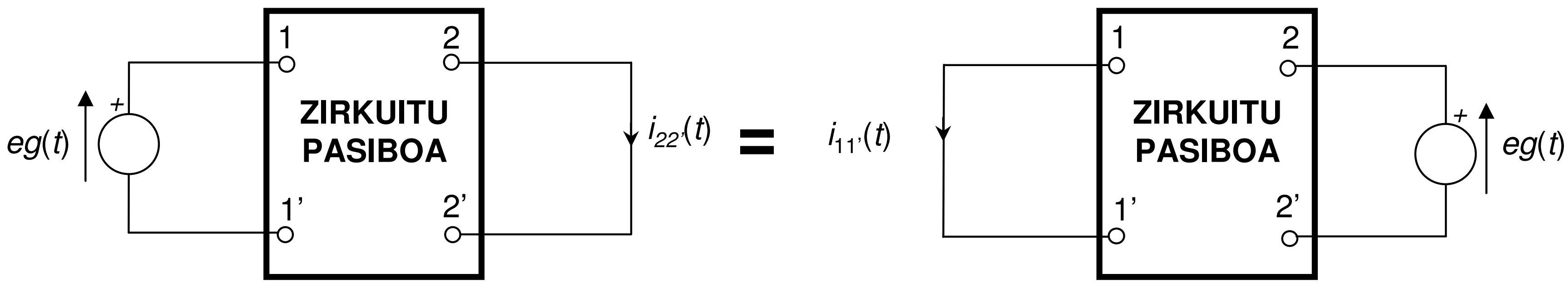
Eta zirkuitu honetan zuzenean kalkulatuko ditugu Δi_n guztiak. Hau da, adarretako batetan $\Delta Z(D)$ baliodun inpedantzia bat gehitzean zirkuituak pairatu dituen korronte aldaketak.

5.7.1 LEHEN ENUNTZIATUA.

Bedi 4 borne dituen zirkuitu pasibo bat. Bere borneetako biren artean (1 eta 1') korronte-iturri ideal bat sartzen badugu, zirkuitu irekian dauden 2 eta 2' borneen artean $u_{22'}(t)$ tentsioa agertuko da. Aurreko korronte-iturria, orain, 2 eta 2' artean sartzen badugu orduan 1 eta 1'-ren artean agertuko den $u_{11'}(t)$ tentsioa, aurreko $u_{22'}(t)$ tentsioaren balio berekoa izango da.



Bedi eskura (1, 1', 2, 2') lau borne dituen zirkuitu pasibo bat. Demagun 1 eta 1' borneen artean tentsio-iturri bat sartzen dugula eta 2 eta 2' borneak zirkuitulaburtzen ditugula, orduan 2tik 2'ra, $i_{22'}(t)$ korrontea azalduko da. Aldiz, tentsio-iturria 2 eta 2'- ren artean jartzen badugu, 1 eta 1' borneak zirkuitulaburtuz, 1 eta 1' borneen artean agertuko den $i_{11'}(t)$ korrontea aurreko kasuan agertutako $i_{22'}(t)$ korrontearen balio berekoa izango da.



5.8 BIBLIOGRAFIA

- V.M. Parra Prieto eta beste, Teoría de Circuitos, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madril 1990. XVI. Gaia
- E. Alfaro Segovia, Teoría de Circuitos y Electrometría. Egilea, Madril 1970.
  7. kapitulua, 17, 18 eta 19. gaiak.
- R.L. Boylestad, Análisis Introductorio de Circuitos, Prentice Hall, Mexiko 1998.
  9. kapitulua
- A. Gómez, J.A. Olivera, Problemas resueltos de Teoría de Circuitos, Paraninfo, Madril 1990. 3.Kapitulua
- P. Sánchez Barrios eta beste, Teoría de Circuitos, Pearson Educación, Madril 2007.
  1. kapitulua