

## Tema 3. Principio de Funcionamiento de Turbomáquinas.

### 3.1. Introducción

En este tema se quiere obtener una expresión sencilla que relacione el comportamiento de una turbomáquina con su diseño. La presencia de los efectos viscosos en los fluidos complica el desarrollo de una teoría sencilla que permita establecer esta relación, y aplicarla en la mejora de diseños de las turbomáquinas. Para mejorar el diseño, será necesario siempre recurrir a la experimentación con modelos, aplicando la teoría de la semejanza, que se verá en el siguiente tema.

Las ecuaciones desarrolladas en este capítulo, por lo tanto, son simplemente una buena herramienta para hacer una estimación inicial del diseño más adecuado de una turbomáquina para una determinada situación, o predecir el comportamiento de una turbomáquina de unas determinadas características.

El sentido físico del principio de funcionamiento de las turbomáquinas se encuentra en el teorema del impulso o de conservación de la cantidad de movimiento, introducido ya en el Tema 2.

### 3.2. Triángulos de Velocidades en Turbomáquinas

En una turbomáquina, un fluido en movimiento atraviesa un rodete que también se mueve. Eso implica que, en cualquier punto de contacto entre el fluido y el rodete, se puede hablar de tres vectores de velocidad: la velocidad absoluta del fluido (de módulo  $c$ ), la velocidad relativa del fluido con respecto al rodete (de módulo  $w$ ) y la velocidad del rodete (de módulo  $u$ ) lineal (en dirección tangencial). Dado que el rodete gira con velocidad angular  $\omega$ , el módulo de la velocidad del rodete está relacionado con ésta y la posición radial del punto considerado:

$$u = \omega \cdot r \quad [\text{longitud/tiempo}] \quad (3.1)$$

donde las unidades de la velocidad angular deberían expresarse en radianes (adimensional) por unidad de tiempo. Los tres vectores,  $c$ ,  $w$  y  $u$ , no son independientes entre sí, sino que están relacionados en los llamados triángulos de velocidades, de modo que se cumple siempre que:

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \quad (3.2)$$

estableciéndose una relación entre los vectores tal como la que se esquematiza en la Figura 3.1.

Aplicado al rodete de una turbomáquina, sólo hay dos puntos importantes a considerar: el punto de entrada del fluido al rodete (1) y el punto de salida del fluido del rodete (2). Para el punto de entrada, de este modo, la ecuación (3.2) queda:

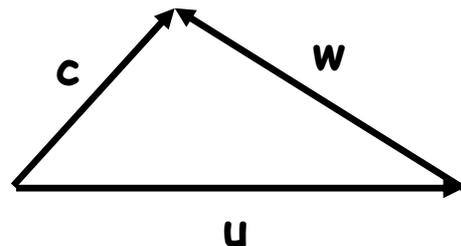


Figura 3.1. Triángulos de velocidades en turbomáquinas.

$$\bar{c}_1 = \bar{w}_1 + \bar{u}_1 \quad (3.3)$$

mientras que para el punto de salida, la ecuación (3.2) queda:

$$\bar{c}_2 = \bar{w}_2 + \bar{u}_2 \quad (3.4)$$

Aunque las ecuaciones que se van a obtener en este tema son válidas tanto para turbomáquinas generadoras como para turbomáquinas motoras, conviene fijar una de ellas en el desarrollo, para establecer un criterio de signos claro y una visualización más sencilla. En este caso, se va a considerar en el desarrollo que se aplica a una turbomáquina motora, es decir, una turbina. La Figura 3.2 muestra un esquema del rodete de una turbomáquina motora, con indicación de la sección de entrada (1) y de salida (2) del flujo al rodete, y el sentido de giro alrededor del eje.

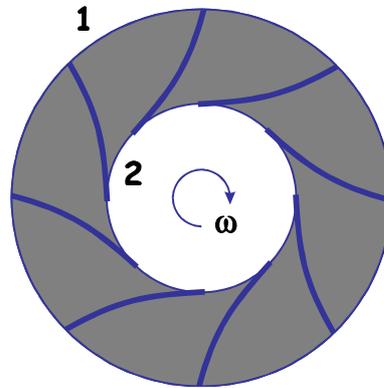


Figura 3.2. Rodete de una turbomáquina motora: (1) sección de entrada del fluido, (2) sección de salida del fluido.

### 3.2.1. Triángulo de Velocidades de Entrada

En el rodete de la Figura 3.2, la dirección de la velocidad absoluta de entrada del fluido,  $c_1$ , vendría normalmente dada por la presencia de un distribuidor. Un distribuidor no es más que un conjunto de álabes fijos (en el sentido de que no giran, como los del rodete, aunque pueden ser orientables). En la Figura 3.3 se muestra el rodete de la Figura 3.2 junto con un posible distribuidor (en color gris más claro, con los álabes en azul) que orienta la velocidad  $c_1$ , también dibujada. Entre el distribuidor y el rodete se puede observar una cierta holgura.

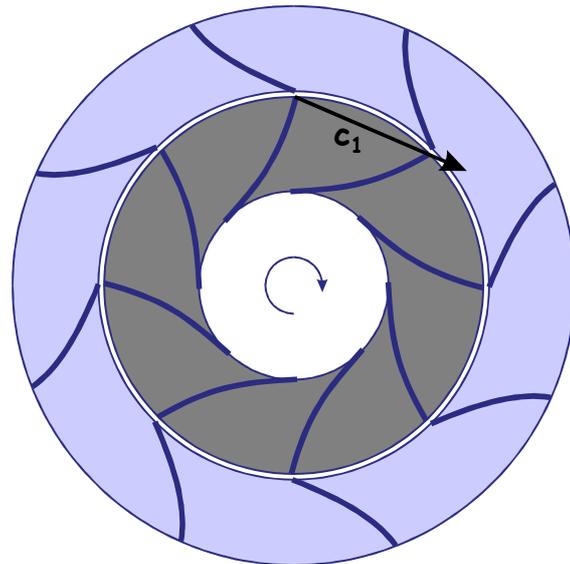


Figura 3.3. Rodete y distribuidor de una turbomáquina motora. Se muestra también el vector de velocidad absoluta de entrada del fluido al rodete ( $c_1$ )

Sobre este rodete, la velocidad tangencial a la entrada vendría dada por la ecuación (3.1), donde la posición radial corresponde a la distancia de la sección de entrada al eje del rodete.

$$u_1 = \omega \cdot r_1 \quad (3.5)$$

En la Figura 3.4 puede observarse cómo quedaría, sobre el rodete de la Figura 3.2, el vector  $u_1$  y, con él, el triángulo de entrada al rodete. El objetivo, al menos en

condiciones de diseño, es que el vector velocidad relativa del fluido a la entrada ( $w_1$ ) sea tangente al álabe del rodete, para evitar pérdidas de energía por choques, tal como sucede en la figura.

Sobre este triángulo de entrada, se definen dos ángulos,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . El ángulo  $\alpha_1$  corresponde al formado entre los vectores  $c_1$  y  $u_1$ , mientras que el ángulo  $\beta_1$  es el que forman los vectores  $u_1$  y  $-w_1$ , como se puede observar en la parte izquierda de la Figura 3.4.

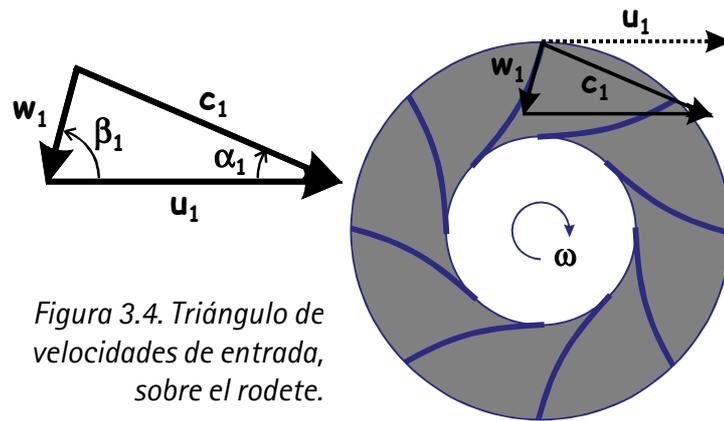


Figura 3.4. Triángulo de velocidades de entrada, sobre el rodete.

### 3.2.2. Triángulo de Velocidades de Salida

En el punto de salida del rodete, la velocidad tangencial  $u_2$  queda definida directamente por la posición radial de esta sección de salida y la velocidad angular a la que gira el rodete.

$$u_2 = \omega \cdot r_2 \quad (3.6)$$

que establece una proporcionalidad entre los módulos de  $u_1$  y  $u_2$  y la posición radial de las secciones 1 y 2, o los diámetros:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (3.7)$$

Por otro lado, la dirección de  $w_2$  viene fijada por el ángulo de salida del álabe en el rodete, lo que directamente fija el vector  $c_2$  de velocidad absoluta del fluido a la salida del rodete para cerrar el triángulo de acuerdo con la ecuación (3.4). Todo esto puede verse sobre el rodete en la Figura 3.5.

Sobre el triángulo de salida se definen también dos ángulos,  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , de forma similar a como se hizo en el punto anterior con el triángulo de entrada. El ángulo  $\alpha_2$  es el formado por los vectores  $c_2$  y  $u_2$ , mientras que el ángulo  $\beta_2$  es el que forman los vectores  $u_2$  y  $-w_2$ , como se puede ver en la Figura 3.5. En general, sobre cualquier triángulo de velocidades,  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $c$  y  $u$ , y  $\beta$  se refiere al formado entre  $u$  y  $-w$ .

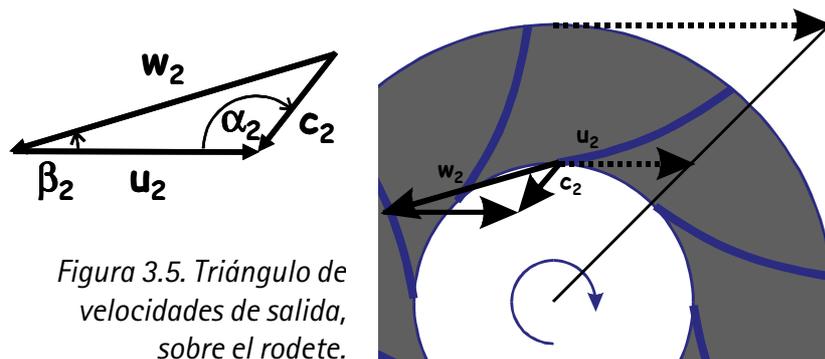


Figura 3.5. Triángulo de velocidades de salida, sobre el rodete.

### 3.3. Ecuación Fundamental de las Turbomáquinas: Ecuación de Euler

La ecuación de Euler se deduce a partir del teorema del impulso (ecuación (2.11)). Considerando cómo se han definido las velocidades del fluido en el punto 3.2, es necesario adaptar la ecuación a la nomenclatura usada cuando se trabaja con movimientos relativos. En el caso de turbomáquinas, por tanto, se puede escribir:

$$\vec{F} = p_1 \cdot \vec{S}_1 + p_2 \cdot \vec{S}_2 + \vec{G} - \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) \quad (3.8)$$

donde, como ya se especificó en el Tema 2, las presiones empleadas son presiones relativas, y  $F$  representa la fuerza ejercida por el fluido sobre el conducto, entre las secciones 1 y 2, es decir, sobre el rodete (álabe) al atravesarlo. En la mayor parte de las situaciones, y en su aplicación a turbomáquinas en particular, el peso del fluido comprendido entre las secciones 1 y 2 es despreciable frente al resto de las fuerzas, de modo que la ecuación (3.8) se puede simplificar a:

$$\vec{F} = p_1 \cdot \vec{S}_1 + p_2 \cdot \vec{S}_2 - \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) \quad (3.9)$$

La fuerza  $F$  es precisamente la que produce el intercambio de energía entre el fluido y la turbomáquina. En turbomáquinas, lo más habitual es hablar de potencias. La fuerza  $F$  está relacionada con la potencia de propulsión, también conocida como potencia técnica,  $P_t$ , que se obtiene del producto escalar del vector fuerza por el vector velocidad lineal de desplazamiento del rodete:

$$P_t = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad [\text{Energía/tiempo}] \quad (3.10)$$

Analizando la expresión de la fuerza en la ecuación (3.9), se puede separar en dos términos, uno de ellos relacionado con la sección 1 y el otro con la sección 2. Lo mismo se puede decir de la velocidad lineal de desplazamiento del rodete, que es diferente en la sección 1 y 2. De este modo, la ecuación (3.10) se puede escribir desarrollada como:

$$P_t = p_1 \cdot (\vec{S}_1 \cdot \vec{u}_1) + \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{u}_1) + p_2 \cdot (\vec{S}_2 \cdot \vec{u}_2) - \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_2 \cdot \vec{u}_2) \quad (3.11)$$

donde los términos entre paréntesis corresponden a los productos escalares de los vectores correspondientes. Los vectores  $S_1$  y  $S_2$  tienen dirección radial, por lo que son perpendiculares, respectivamente, a las velocidades  $u_1$  y  $u_2$ , de modo que su producto escalar se anula. Así, la ecuación (3.11) se simplifica a:

$$P_t = \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{u}_1) - \rho \cdot Q \cdot (\vec{c}_2 \cdot \vec{u}_2) \quad (3.12)$$

y, desarrollándola, teniendo en cuenta cómo se han definido en el punto anterior los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ :

$$P_t = \rho \cdot Q \cdot (c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2) \quad (3.13)$$

Además de potencia técnica, es bastante común hablar, en máquinas de fluidos, de trabajo técnico (específico,  $W_t$ ), y de par motor ( $M_t$ ). Ambos se pueden expresar partiendo de la ecuación (3.13). Para el trabajo técnico, la expresión queda:

$$W_t = \frac{P_t}{\rho \cdot Q} = c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad [\text{Energía/masa}] \quad (3.14)$$

y, para el par motor, se llega a que su módulo es:

$$M_t = \frac{P_t}{\omega} = \rho \cdot Q \cdot (c_1 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot r_2 \cdot \cos \alpha_2) \quad [\text{Fuerza} \cdot \text{longitud}] \quad (3.15)$$

ya que se trata de un vector, que se obtiene del producto vectorial del vector fuerza por el vector distancia perpendicular al eje:

$$\vec{M}_t = \vec{F} \times \vec{r} \quad (3.16)$$

El trabajo técnico representa el trabajo realizado por unidad de masa de fluido sobre el rodete, es decir, comunicado a la turbomáquina. El par motor representa la variación del momento de la fuerza ejercida por el fluido entre la entrada y la salida del rodete. El momento entre la entrada y la salida del rodete cambia por la interacción entre el fluido y el sólido. En ausencia de sólido, el momento se mantendría constante (entre la salida del distribuidor y la entrada del rodete, por ejemplo, de la Figura 3.3).

Tanto la ecuación (3.14) como la ecuación (3.15) son expresiones de la ecuación de Euler. Si se quiere expresar en unidades de altura de fluido, lo que nos va a resultar útil en la asignatura, simplemente habría que dividir por  $g$  en la expresión del trabajo técnico:

$$H_t = \frac{W_t}{g} = \frac{c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2}{g} \quad (3.17)$$

### 3.4. Interpretación y Discusión de la Ecuación de Euler

Aunque la ecuación de Euler (según la ecuación (3.14), la ecuación (3.15) o la ecuación (3.17)) se ha deducido para el caso de turbinas, es válida tanto para turbinas como para bombas. Dado que se ha partido de la fuerza  $F$  para deducirla, que hemos definido como la fuerza que ejerce el fluido sobre el rodete,  $W_t$  (y, por tanto,  $M_t$  y  $H_t$ ) debe ser positivo en turbinas, donde la fuerza que ejerce el fluido sobre el rodete se transforma en energía mecánica en el eje.

En el caso de bombas, sin embargo, la energía mecánica en el eje se transforma en energía de fluido. Por lo tanto, la fuerza que interviene en esa transformación es la que ejerce el rodete sobre el fluido, y no al revés, es decir,  $-F$ . Así, para el caso de bombas, el trabajo técnico se define como el trabajo que realiza el rodete sobre la unidad de masa de fluido. Por lo tanto, para el caso de bombas las expresiones para la ecuación de Euler quedarían:

$$W_t = \frac{P_t}{\rho \cdot Q} = c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad (3.18)$$

$$M_t = \frac{P_t}{\omega} = \rho \cdot Q \cdot (c_2 \cdot r_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha_1) \quad (3.19)$$

$$H_t = \frac{W_t}{g} = \frac{c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1}{g} \quad (3.20)$$

o, lo que viene a ser lo mismo, si se emplean las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.17) para bombas, los valores de  $W_t$ ,  $M_t$  y  $H_t$  serán negativos.

La ecuación de Euler es válida tanto para fluidos compresibles como incompresibles, y es independiente de la forma que tengan los álabes en el rodete, ya que sólo depende del punto de entrada al rodete (1) y del punto de salida del rodete (2).

Sin embargo, la deducción de la ecuación de Euler considera que el rodete tiene un número infinito de álabes, ya que supone que no importa por qué punto de la sección 1 entre el fluido al rodete o por qué punto de la sección 2 salga el fluido del rodete, siempre se va a encontrar con un álabe que le guíe. Es decir, el triángulo de velocidades de entrada es idéntico en cualquier punto de la sección de entrada, y el triángulo de velocidades de salida es idéntico en cualquier punto de la sección de salida. Para número de álabes finito, veremos más adelante cómo realizar la corrección.

Resulta interesante realizar algún análisis adicional sobre la expresión de la ecuación de Euler. Para ello, vamos a modificarla convenientemente. En cualquier triángulo, se puede expresar la longitud de uno de sus lados en función de los otros dos y el ángulo que forman. Para cualquier triángulo de velocidades, entonces:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2 \cdot c \cdot u \cdot \cos \alpha \quad (3.21)$$

Aplicando esta expresión al triángulo de velocidades de entrada y al triángulo de velocidades de salida, se puede escribir:

$$c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{u_1^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} \quad (3.22)$$

$$c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \quad (3.23)$$

y, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.14), se obtiene, agrupando los términos de velocidades:

$$W_t = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (3.24)$$

de donde, dado que interesa que el trabajo técnico realizado por unidad de masa de fluido sobre el rodete sea el máximo posible, se puede deducir por qué las turbinas se diseñan normalmente como centrípetas, con mayor distancia radial de la sección de entrada que

de la sección de salida:  $r_1 \geq r_2$ . De acuerdo con la proporcionalidad mencionada en la ecuación (3.7), esto implica que  $u_1 \geq u_2$ , lo que contribuye a aumentar  $W_t$ .

Para bombas, sustituyendo las ecuaciones (3.22) y (3.23) en la ecuación (3.18) y agrupando de forma similar:

$$W_t = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad (3.25)$$

y teniendo en cuenta que el objetivo en bombas es maximizar el trabajo técnico comunicado por el rodete a la unidad de masa de fluido, se puede llegar, de forma similar, a deducir por qué las bombas se diseñan normalmente como centrífugas, donde  $r_1 \leq r_2$ , es decir, el fluido entra en el rodete cerca del eje y sale del rodete normalmente a una distancia radial mayor. La situación límite para turbinas y bombas es que  $r_1 = r_2$ , donde  $u_1 = u_2$ , lo que corresponde a turbomáquinas axiales, que corresponde normalmente a situaciones en las que  $H_t$  es pequeño.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la entrada y la salida del rodete, y adaptando la nomenclatura empleada para la velocidad en el Tema 2, teniendo en cuenta que las velocidades absolutas del fluido se han nombrado como  $c$  (en lugar de  $v$ ), y que la pérdida de carga suele expresarse en turbomáquinas como un término  $H_r$  (en lugar de  $h_r$ ), se puede expresar el trabajo técnico cedido por el fluido al rodete como:

$$W_t = H_t \cdot g = \left( \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g \cdot \alpha_1} + z_1 \right) \cdot g + \left( \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{c_2^2}{2 \cdot g \cdot \alpha_2} + z_2 \right) \cdot g + H_{r1-2} \cdot g \quad (3.26)$$

Si suponemos que la altura media de la sección de entrada y la sección de salida es la misma,  $z_1 = z_2$ , lo que es bastante cierto, que el flujo es turbulento, y se desprecia la pérdida de carga en el rodete (está diseñado de forma aerodinámica), se puede escribir:

$$W_t \approx \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (3.27)$$

donde el primer término corresponde a la variación de energía cinética del flujo, y el segundo término a la variación de energía de presión (para máquinas de fluidos térmicas, este término correspondería a variación de entalpías). En el caso particular de las turbinas de acción o de impulso, donde  $p_1 = p_2$  dado que no se produce intercambio de energía en forma de presión en el rodete, sólo se intercambia energía cinética de fluido en el rodete. Si se compara la ecuación (3.27) con la ecuación de Euler según la expresión (3.24), se puede escribir que:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} \approx \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (3.28)$$

de donde se puede deducir que, en turbomáquinas axiales ( $u_1 = u_2$ ), la variación de energía de presión en el rodete coincide con la variación de energía cinética relativa (asociada a la velocidad relativa del fluido).