Tema 4. Semejanza en Turbomáquinas.

4.1. Condiciones de Semejanza

Los estudios de semejanza en turbomáquinas se realizan para poder comparar entre turbomáquinas semejantes y establecer familias entre ellas, para predecir cuáles pueden ser los efectos del cambio de condiciones de operación, y para poder trabajar en la mejora del diseño mediante la utilización de modelos a escala.

Se pueden establecer, de menor a mayor, diferentes niveles de semejanza, cada uno de los cuales requiere que se cumpla el nivel anterior. El primer nivel es la semejanza geométrica, el segundo nivel es la semejanza cinemática y el tercer nivel de semejanza es la semejanza dinámica. Es interesante trabajar con un nivel de semejanza lo más elevado posible, porque elevada semejanza implica extender con confianza las conclusiones obtenidas en el estudio de modelos hacia prototipos a escala real.

4.1.1. Semejanza Geométrica

La semejanza geométrica es el nivel de semejanza más bajo, aunque también el que resulta visualmente más claro. Establece la proporcionalidad entre las dimensiones equivalentes de un prototipo y un modelo y, con ello, permite definir el factor de escala, λ:

$$\lambda = \frac{\text{Dimensión del prototipo}}{\text{Dimensión del modelo}} = \frac{D_p}{D_m} \qquad (4.1)$$

donde el subíndice *p* se refiere al prototipo y el subíndice *m* se refiere al modelo. La última parte de la ecuación (4.1) recoge la relación de diámetros del rodete entre el prototipo y el modelo, como una de las dimensiones más características en turbomáquinas.

4.1.2. Semejanza Cinemática

La semejanza cinemática es el segundo nivel de semejanza, y para que se pueda plantear es necesario que exista semejanza geométrica entre el prototipo y el modelo. Este nivel de semejanza implica semejanza entre los triángulos de velocidades del prototipo y del modelo en puntos equivalentes, es decir, igualdad de los ángulos α y β en el prototipo y en el modelo:

$$\alpha_p = \alpha_m \qquad (4.2)$$

$$\beta_p = \beta_m \qquad (4.3)$$

lo que implica proporcionalidad entre los módulos de las velocidades, de acuerdo con:

$$\frac{c_p}{c_m} = \frac{w_p}{w_m} = \frac{u_p}{u_m} \qquad (4.4)$$

4.1.3. Semejanza Dinámica

La semejanza dinámica es el siguiente nivel de semejanza y, para que pueda existir, requiere que se cumplan los dos niveles de semejanza anteriores. Este nivel de semejanza implica proporcionalidad entre fuerzas en el prototipo y en el modelo, en puntos equivalentes, lo que a su vez corresponde a la igualdad de números adimensionales que relacionan fuerzas. Desde el punto de vista de turbomáquinas, el Re es el número adimensional que relaciona fuerzas que presenta más interés.

La existencia de semejanza dinámica, entonces, implicaría que se cumple, al menos, la siguiente relación entre el prototipo y el modelo:

$$\mathrm{Re}_p = \mathrm{Re}_m \tag{4.5}$$

Desarrollando la expresión para el número de Reynolds en una turbomáquina, para rodete de prototipo y de modelo girando a una determinada velocidad angular, se tendría:

$$\frac{D_p^2 \cdot \omega_p}{\nu_p} = \frac{D_m^2 \cdot \omega_m}{\nu_m} \tag{4.6}$$

donde ν_p y ν_m son las viscosidades cinemáticas (cociente entre viscosidad y densidad) de los fluidos con los que opera la turbomáquina prototipo y modelo, respectivamente.

Simplificando para la situación más habitual, en que la turbomáquina prototipo y la turbomáquina modelo se ensayan con el mismo fluido (normalmente agua, al menos en el diseño), $\nu_p = \nu_m$, se llega a:

$$\frac{\omega_m}{\omega_p} = \frac{D_p^2}{D_m^2} = \lambda^2 \tag{4.7}$$

es decir, la velocidad angular de giro del rodete de la turbomáquina modelo tiene que ser λ^2 veces la velocidad angular de giro del rodete de la turbomáquina prototipo, para que presenten semejanza dinámica. Para hacernos una idea de lo que esto representa, podemos suponer, por ejemplo, que el prototipo sea 5 veces mayor que el modelo, es decir, $\lambda = 5$, lo que no es un valor descabellado. Así, si el prototipo opera a 1.000 rpm (revoluciones por minuto), que no es una velocidad elevada, el modelo debería girar a:

$$\omega_m = \lambda^2 \cdot \omega_p = 5^2 \cdot 1.000 \text{ rpm} = 25.000 \text{ rpm}$$

que es un valor exagerado y que ocasionaría muchos problemas de operación.

Por esta razón, no se trabaja con semejanza dinámica en turbomáquinas. Sí con semejanza geométrica y también con semejanza cinemática, pero no con semejanza dinámica.

Restringir de esta forma el grado de semejanza con que se trabaja en turbomáquinas ocasiona problemas, sobre todo a la hora de operar con modelos en el diseño. Para minimizarlos, tanto los modelos como los prototipos de turbomáquinas han de operar con valores de Re elevados, lo que se consigue operando con velocidades angulares altas y, sobre todo, con fluidos con viscosidad cinemática relativamente baja. El objetivo es asegurarse en ambos casos (prototipo y modelo) que la turbomáquina opera en régimen turbulento, ya que en estas condiciones el factor de fricción (*f*, ecuación (2.7)) que, de modo general, depende de la rugosidad relativa del sólido y del régimen de flujo:

$$f = f(\varepsilon/D, Re) \tag{4.8}$$

pasa a depender únicamente de la rugosidad relativa del rodete (zona horizontal en la gráfica de Moody, disponible en cualquier texto de mecánica de fluidos, que representa la dependencia de *f* frente al Re, a diferentes valores de ε/D).

Con estas condiciones, se obtiene una semejanza aceptable entre el prototipo y el modelo, en prácticamente todos los aspectos prácticos. El único aspecto que no se mantiene semejante como consecuencia de obviar la semejanza dinámica es el de los rendimientos. Si el material de que está construida la turbomáquina prototipo y modelo es el mismo, presentan como característica común la rugosidad, ε, que depende del material. Pero el factor de fricción, *f*, es función de la rugosidad relativa, ε/D, de acuerdo con la ecuación (4.8), y esta rugosidad relativa es mayor en el caso del modelo que del prototipo, ya que $D_m < D_p$:

$$\varepsilon/D_m > \varepsilon/D_p \tag{4.9}$$

lo que trae como consecuencia que $f_m > f_p$. De este modo, las pérdidas por fricción son proporcionalmente mayores en el modelo que en el prototipo, es decir, son proporcionalmente tanto mayores cuanto menor es el tamaño de la turbomáquina. Dado que las pérdidas por fricción afectan a los rendimientos, el rendimiento de una turbomáquina es tanto mayor cuanto mayor es su tamaño. Este enunciado se expresa mediante la relación de Moody para los rendimientos en turbomáquinas semejantes, en función del factor de escala, válida tanto para turbinas como para bombas:

$$\frac{1-\eta_m}{1-\eta_p} = \lambda^{0,25} \tag{4.10}$$

4.1.4. Consecuencias de Operar en Condiciones de Semejanza

Trabajar en condiciones de semejanza con prototipos y modelos de turbomáquinas, implica que se cumplen una serie de relaciones, derivadas exclusivamente del análisis dimensional, que se van a utilizar posteriormente para derivar las relaciones de semejanza:

a) Relación entre velocidades y alturas

Estableciendo una relación proporcional entre altura de fluido y energía cinética expresada en unidades de altura, se puede escribir:

$$\frac{H_p}{H_m} = \frac{c_p^2/(2\cdot g)}{c_m^2/(2\cdot g)} \tag{4.11}$$

donde no se ha incluido el término de corrección para las velocidades medias ya que, como se ha indicado arriba, trabajar en condiciones de semejanza implica trabajar en régimen turbulento en turbomáquinas. Despejando las velocidades, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{c_p}{c_m} = \left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{1/2} \tag{4.12}$$

b) Relación entre velocidades y revoluciones

Partiendo de la ecuación (4.4) de semejanza cinemática en turbomáquinas, y desarrollando las velocidades tangenciales del rodete en función de la velocidad angular (ecuación (3.1)), se tiene:

$$\frac{c_p}{c_m} = \frac{u_p}{u_m} = \frac{r_p\cdot\omega_p}{r_m\cdot\omega_m} \tag{4.13}$$

de donde:

$$\frac{c_p}{c_m} = \lambda\frac{n_p}{n_m} \tag{4.14}$$

donde n_p y n_m representan las velocidades angulares expresadas en rpm, una unidad muy común cuando se habla de turbomáquinas, y que, en ocasiones, es preceptivo usar. A partir de este momento, aunque la variable es la misma, se expresará la velocidad angular como ω cuando esté en radianes (adimensional) por unidad de tiempo (típicamente rad/s), y como n cuando esté expresada en rpm.

4.2. Relaciones de Semejanza en Turbomáquinas

Todo lo comentado en el punto anterior permite enunciar las relaciones de semejanza en turbomáquinas. Para ello, es necesario separar en el estudio las turbinas de las bombas, porque no interesa tomar las mismas variables como variables independientes.

4.2.1. Relaciones de Semejanza en Turbinas

En turbinas, las variables que se toman como independientes cuando se establecen relaciones entre un modelo y un prototipo son el factor de escala (λ) y la altura (H). La altura corresponde a la carga del fluido a su entrada a la turbina (la energía que puede ceder), y se suele relacionar con el salto, o diferencia de alturas entre el embalse y el río en turbinas de centrales hidroeléctricas.

De acuerdo con esto, se establecen las siguientes tres relaciones de semejanza en turbinas: semejanza de revoluciones ($n = n\ (\lambda, H)$), semejanza de caudales ($Q = Q\ (\lambda, H)$) y semejanza de potencias ($P_e = P_e\ (\lambda, H)$).

a) Semejanza de revoluciones

Se obtiene igualando la ecuación (4.12) con la ecuación (4.14), y despejando la relación de revoluciones entre prototipo y modelo:

$$\frac{n_p}{n_m} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{1/2} \tag{4.15}$$

b) Semejanza de caudales

Se puede expresar la relación de caudales entre el prototipo y el modelo considerando su relación con la sección de paso y la velocidad, como:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{S_p \cdot c_p}{S_m \cdot c_m} \tag{4.16}$$

Sustituyendo la relación entre las secciones por el factor de escala al cuadrado, y la relación de velocidades de acuerdo con la ecuación (4.12), se llega a la expresión que se busca:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^2\left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{1/2} \tag{4.17}$$

c) Semejanza de potencias

La potencia al freno (relacionada con la energía mecánica que se obtiene de la turbina) se puede expresar en turbinas como la potencia que cede el fluido a su paso por el rodete (relacionada con la energía del fluido) multiplicada por el rendimiento de la turbomáquina. De esta forma, la relación entre potencia al freno del prototipo y del modelo se puede expresar como:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \frac{P_p \cdot \eta_p}{P_m \cdot \eta_m} = \frac{\rho_p \cdot g \cdot Q_p \cdot H_p \cdot \eta_p}{\rho_m \cdot g \cdot Q_m \cdot H_m \cdot \eta_m} \tag{4.18}$$

Sustituyendo la relación de caudales por la ecuación (4.17), se puede escribir:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \lambda^2\left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{3/2} \frac{\rho_p \cdot \eta_p}{\rho_m \cdot \eta_m} \tag{4.19}$$

Esta ecuación se simplifica a menudo, suponiendo que se emplea el mismo fluido en el prototipo y en el modelo ($\rho_p = \rho_m$), y un cociente de rendimientos entre el prototipo y el modelo cercano a la unidad (los rendimientos no son muy distintos). En estas condiciones:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \lambda^2 \left(\frac{H_p}{H_m} \right)^{3/2} \tag{4.20}$$

4.2.2. Relaciones de Semejanza en Bombas

En bombas, las variables que se toman como independientes a la hora de establecer relaciones entre un modelo y un prototipo son: el factor de escala (λ) y las revoluciones de giro del rodete de la bomba (n).

De acuerdo con esto, se establecen las siguientes tres relaciones de semejanza en bombas: semejanza de alturas ($H = H(\lambda,n)$), semejanza de caudales ($Q = Q(\lambda,n)$) y semejanza de potencias ($P_e = P_e(\lambda,n)$).

a) Semejanza de alturas

Se obtiene igualando la ecuación (4.12) y la ecuación (4.14), de la misma forma que en turbinas, pero despejando la relación entre alturas de prototipo y modelo:

$$\frac{H_p}{H_m} = \lambda^2 \left(\frac{n_p}{n_m} \right)^2 \tag{4.21}$$

b) Semejanza de caudales

Partiendo de la ecuación (4.16) que relaciona los caudales entre prototipo y modelo, válida también para bombas, y sustituyendo la relación de secciones por el factor de escala al cuadrado, y la relación de velocidades por la ecuación (4.14), se puede escribir:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^3 \frac{n_p}{n_m} \tag{4.22}$$

c) Semejanza de potencias

En bombas, la potencia al freno (relacionada con la energía mecánica comunicada por un motor al eje de la bomba para mover el rodete) se puede expresar como la potencia que le comunica al fluido el rodete (relacionada con la energía de fluido) dividido por el rendimiento de la turbomáquina (al fluido le llega menos energía que la energía mecánica consumida). De este modo, la relación de potencias al freno entre el prototipo y el modelo se puede escribir:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \frac{P_p \cdot \eta_m}{\eta_p \cdot P_m} = \frac{\rho_p \cdot g \cdot Q_p \cdot H_p \cdot \eta_m}{\rho_m \cdot g \cdot Q_m \cdot H_m \cdot \eta_p} \tag{4.23}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.23) las relaciones dadas por la ecuación (4.21) para las alturas y la ecuación (4.22) para los caudales, se obtiene:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \lambda^5 \left(\frac{H_p}{H_m} \right)^3 \frac{\rho_p \cdot \eta_m}{\rho_m \cdot \eta_p} \tag{4.24}$$

Simplificando la expresión cuando se emplea el mismo fluido en el prototipo y en el modelo ($\rho_p = \rho_m$), se llega a:

$$\frac{P_{ep}}{P_{em}} = \lambda^5 \left(\frac{H_p}{H_m} \right)^3 \frac{\eta_m}{\eta_p} \tag{4.25}$$

4.3. Velocidad Específica de Turbomáquinas

Como en el caso anterior, es necesario diferenciar entre turbomáquinas motoras y turbomáquinas generadoras, ya que los datos que se requieren y de que se dispone para diseñarlas o elegir entre diferentes diseños para una determinada aplicación son diferentes. La velocidad específica nos permite establecer familias de turbomáquinas semejantes.

4.3.1. Velocidad Específica de Turbinas

Para fabricar una turbina, los datos de que se dispone son, normalmente, la altura (*H*; carga de fluido a la entrada, o salto del embalse para turbinas en centrales hidroeléctricas) y la potencia demandada, es decir, la potencia que tiene que ser capaz de producir (P_e; potencia al freno).

La velocidad específica en turbinas se obtiene partiendo de la primera relación de semejanza (ecuación (4.15)) y de la tercera relación de semejanza (ecuación (4.20), ya simplificada para el mismo fluido y cociente de rendimientos supuesto la unidad. Se trata, entre las dos, de obtener una expresión en la que no aparezca el factor de escala. Para ello, se eleva al cuadrado la ecuación (4.15) y se multiplican ambas ecuaciones miembro a miembro:

$$\left(\frac{n_p}{n_m} \right)^2 \cdot \frac{P_{ep}}{P_{em}} = \left(\frac{H_p}{H_m} \right)^{5/2} \tag{4.26}$$

Agrupando en uno de los términos todas las variables relacionadas con el prototipo y en el otro todas las relacionadas con el modelo, se obtiene:

$$\frac{n_p^2 \cdot P_{ep}}{H_p^{5/2}} = \frac{n_m^2 \cdot P_{em}}{H_m^{5/2}} \tag{4.27}$$

El prototipo y el modelo puede ser cualquiera, por lo que esta agrupación de variables se puede utilizar para establecer familias de turbinas semejantes. Suele ser habitual trabajar con la raíz cuadrada de la ecuación (4.27), de forma que a velocidad de giro del rodete (*n*, en rpm) no esté elevado a ningún exponente, y establecer que, para cada familia de turbinas:

$$\frac{n \cdot P_e^{1/2}}{H^{5/4}} = \text{constante} = n_S \tag{4.28}$$

A la agrupación de parámetros de la ecuación (4.28) se le conoce como número de revoluciones específico o velocidad específica de una turbina, n_S, y su valor define la familia a la que pertenece esa turbina, que determina su diseño.

Un aspecto importante de la velocidad específica n_S es que no es un número adimensional, aunque no se le pongan unidades. Tradicionalmente, se trabaja con valores de n_S en los que n se introduce en rpm, la potencia al freno, P_e, se introduce en CV (caballos de vapor), y la H se introduce en metros, y con estos valores de n_S están escaladas las gráficas de diseño básico de turbinas.

4.3.2. Velocidad Específica de Bombas

Para fabricar una bomba, o elegir una bomba para una determinada aplicación, los datos de los que se dispone son, normalmente, la altura (*H*; energía, en unidades de altura de fluido, que le debe comunicar el rodete al fluido) y el caudal demandado (*Q*) que debe ser capaz de bombear.

La velocidad específica de bombas se obtiene partiendo de la primera y la segunda relaciones de semejanza para bombas, expresada en las ecuaciones (4.21) y (4.22). Del mismo modo que para turbinas, se opera con estas dos expresiones para eliminar el factor de escala. Para ello, se eleva la ecuación (4.21) a (3/2), y se dividen ambas expresiones miembro a miembro:

$$\left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{3/2} \cdot \frac{Q_m}{Q_p} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \tag{4.29}$$

Reagrupando, de forma que todas las variables relacionadas con el prototipo queden en un miembro y todas las relacionadas con el modelo en el otro, se tiene:

$$\frac{n_p^2 \cdot Q_p}{H_p^{3/2}} = \frac{n_m^2 \cdot Q_m}{H_m^{3/2}} \tag{4.30}$$

y, dado que no hay ninguna restricción para el modelo y el prototipo, esta agrupación de variables se puede utilizar para establecer familias de bombas semejantes. Suele ser habitual trabajar con la raíz cuadrada de la ecuación (4.30), de modo que el exponente de *n* (en rpm) sea la unidad. De este modo, para cada familia de bombas:

$$\frac{n \cdot Q^{1/2}}{H^{3/4}} = \text{constante} = n_q \tag{4.31}$$

A la agrupación de parámetros de la ecuación (4.31) se le conoce como número de revoluciones específico o velocidad específica de una bomba, n_q (la *q* hace referencia a que aparece el caudal en la expresión), y su valor define la familia a la que pertenece esa bomba, que determina su diseño.

Del mismo modo que se ha comentado en el punto anterior para turbinas, la velocidad específica n_q no es adimensional, aunque no se le pongan las unidades. Tradicionalmente, *n* viene expresada en rpm, el caudal en m^3/s y la altura en m, y el valor de n_q obtenido en estas condiciones es el que se emplea en las gráficas de diseño básico de bombas.