

# PROPUESTA ABPP/PPBL

## Ejercicio 1

Sea la siguiente tabla de valores

	AGOSTO					SEPTIEMBRE			
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Viernes	02	09	16	23	30	06	13	20	27
IBEX 35	6114.1	6400.3	6326.6	6590.1	6435.7	6261.6	6141.3	5761.1	5630.6

que representa la evolución del índice IBEX 35 a lo largo de los meses de agosto y setiembre de 2002 (tomados al cierre de la bolsa cada viernes). Se está interesado en la **tendencia** (ascendente o descendente) de dicho índice en este período, para lo cual se debe obtener la ecuación de la recta (en el sentido de mínimos cuadrados) para dicha serie de datos

$$Y = m X + b$$

donde la variable X representa la “serie de viernes” e Y los “valores esperados del índice IBEX 35”. Sean las matrices

$$\mathbf{p} = (6114.1, 6400.3, 6326.6, 6590.1, 6435.7, 6261.6, 6141.3, 5761.1, 5630.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Para obtener la ecuación de la **recta de regresión** es preciso aplicar la siguiente expresión matricial, que siempre tiene una única solución:

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T p$$

En función de los datos suministrados, ¿cuál ha sido la tendencia del índice IBEX 35 durante los meses de agosto y setiembre de 2002?. Dibujar la recta de regresión, así como el diagrama de dispersión (datos de la tabla anterior).

## Ejercicio 2

La importancia de los sistemas dinámicos continuos lineales invariantes en el tiempo (SDCLIT) es fundamental en la modelización de muchas situaciones de la vida. Uno de tales sistemas está representado por un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de coeficientes constantes (equivalentemente, una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  de coeficientes constantes); a saber:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t) \\ \vec{Y}(t) = C\vec{X}(t) + D\vec{U}(t) \end{cases} \quad (1)$$

siendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  matrices de órdenes adecuados;  $\vec{X}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la “historia detallada de la evolución temporal” del sistema (**estado**),  $\vec{Y}(t)$  “suministra la información de interés proporcionada por el sistema” para el diseñador (**salida**) y  $\vec{U}(t)$  son la “información que se introduce” al sistema (**entrada**).

Un concepto típico que se estudia (entre muchos otros) es el de la controlabilidad. Es decir, el sistema (1) se dice controlable si para cada instante de tiempo  $t_0 \geq 0$  existe otro  $t_1 > t_0$  tal que para cada  $\vec{X}(t_0)$  y  $\vec{X}(t_1)$  es posible encontrar una entrada  $\vec{U}_{[t_0, t_1]}$  que permita llevar al sistema del estado  $\vec{X}(t_0)$  al estado  $\vec{X}(t_1)$  en un tiempo  $t_1$ . Se puede demostrar que para ello es necesario que el rango de la **matriz de controlabilidad**

$$\begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^2B & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

sea “ $n$ ”.

A título de ejemplo, sea el carrito con el péndulo invertido de la figura adjunta (ver más adelante), que viene descrito por el siguiente modelo SDCLIT:

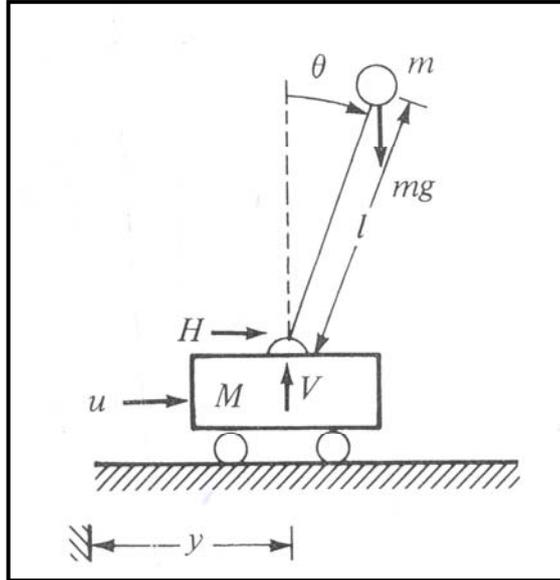
$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \\ \frac{dx_4(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2mg}{2M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2g(M+m)}{(2M+m)l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{2M+m} \\ 0 \\ \frac{-1}{(2M+m)l} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

Estudia la controlabilidad de un péndulo invertido en el que se dan las siguientes relaciones

$$\frac{2mg}{2M + m} = 1; \frac{2g(M + m)}{(2M + m)l} = 5;$$

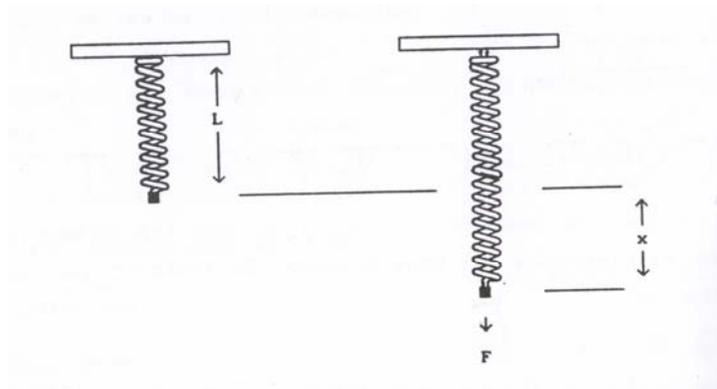
$$\frac{2}{2M + m} = 1; \frac{1}{(2M + m)l} = 2$$



### Ejercicio 3

Desarrollar una búsqueda bibliográfica sobre resultados teóricos de la asignatura en función de los criterios enunciados por el profesorado con la participación consensuada del alumnado, aplicando los criterios del trabajo en grupo cooperativo.

### Ejercicio 4



Sea un resorte de longitud  $L$  como el de la figura adjunta. Al aplicarle una fuerza  $F$  el resorte adquiere una longitud adicional  $x$ . Después de realizados una serie de experimentos se ha obtenido la siguiente tabla

F	1.5	3.9	6.6	11.7	15.6
x	1	2	4	7	9

La ley de Hooke establece que entre la longitud  $x$  y la fuerza aplicada  $F$  existe una relación lineal

$$F = a_0 + a_1 x$$

llamando  $a_1$  al coeficiente constante del resorte. Estamos interesados en deducir los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  a partir de los datos de la tabla anterior. Calcula dichos valores

## Ejercicio 5

Unos grandes almacenes obtienen los siguientes datos relacionando el número de vendedores con el de ventas anuales:

Nº de vendedores	5	6	7	8	9	10
Ventas anuales (millones de €)	2.3	3.2	4.1	5	6.1	7.2

Sea  $X$  el número de vendedores e  $Y$  las ventas anuales.

(a) Encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos anteriores respecto de  $X$  e  $Y$ .

(b) Utilizando la ecuación obtenida en (a) estimar las ventas anuales si hubiesen 14 vendedores. ¿Le conviene a la empresa contratar nuevos empleados?

## Ejercicio 6

Un contador Geiger da una lectura inicial de 232 unidades en 10 minutos. Tras introducir una muestra de indio ( $^{116}\text{In}$ ), las lecturas del contador en sucesivos intervalos de 10 minutos vienen reflejadas en la siguiente tabla:

t (minutos)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
contador	20511	16174	13904	12514	10775	9596

En general, la radiación emitida  $R = R_0 e^{-\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es la constante de desintegración del material. Se trata de ajustar una función del tipo  $g(t) = \alpha e^{\beta t}$  a los datos  $(t_k, y_k)$ , donde  $y_k = \text{contador} - 232$ . A continuación, deducir la vida media ( $= \ln 2 / \lambda$ ) del indio.

## Ejercicio 7

Cuando se utiliza una pila de  $V$  voltios para cargar un condensador, la diferencia de potencial  $v(t)$  entre los bornes del condensador después de  $t$  segundos satisface la ley  $v(t) = V - (V - v_0) e^{-t/\tau}$ , donde  $v_0$  es la diferencia de potencial inicial (en  $t = 0$ ) y  $\tau$  es una constante del circuito. Para una pila de 10 voltios se han obtenido en el laboratorio los siguientes datos

t (seg)	0.5	1	2	3	4	5	7	9
V(t) (voltios)	6.36	6.84	7.26	8.22	8.66	8.99	9.43	9.63

Se pide ajustar estos datos a una función de la forma  $g(t) = \alpha e^{\beta t}$ , estimando al mismo tiempo valores para  $v_0$ ,  $\tau$  y el valor de  $v(t)$  cuando  $t = 6$  s.

## Ejercicio 8

La velocidad de transporte  $\dot{m}$  de una especie química en una superficie porosa se mide como una función de la diferencia de concentración  $\Delta C$  entre la superficie y el medio ambiente. Los resultados que se han obtenido en el laboratorio se muestran en la tabla siguiente:

$\Delta C$ (kg/m <sup>3</sup> )	0.1	0.3	0.4	0.5	0.7	0.9	1.0
$\dot{m}$ (kg/s)	2.53	3.33	3.58	3.78	4.12	4.38	4.50

Se espera que el fenómeno que rige dicho proceso de transferencia de masa esté gobernado por una ley de la forma  $\dot{m} = A(\Delta C)^a$ . Se pide obtener el mejor ajuste posible en el sentido de mínimos cuadrados para los datos de la tabla anterior y determinar las constantes  $A$  y  $\alpha$ , características del material concreto de la superficie estudiada.

## Ejercicio 9

El análisis de espectrofotometría de masas proporciona una serie de lecturas de alturas de pico para varias masas iónicas. Para cada pico, los diversos constituyentes contribuyen a la altura  $h_j$ . Los constituyentes hacen contribuciones diferentes  $c_{ij}$  por unidad de concentración  $p_i$ , de modo que la relación

$$h_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} p_i$$

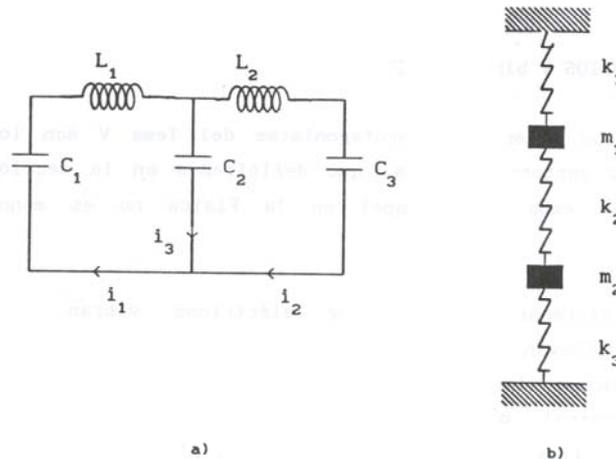
se cumple, donde  $n$  es el número de componentes presentes. Sean los valores para  $c_{ij}$  de la siguiente tabla

Número de pico	Componente				
	CH <sub>4</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
1	0.165	0.202	0.317	0.234	0.182
2	27.7	0.862	0.062	0.073	0.131
3		22.35	13.05	4.420	6.001
4			11.28	0	1.110
5				9.850	1.684
6					15.94

Si una muestra tiene alturas de picos medidos de  $h_1 = 5.20$ ,  $h_2 = 61.7$ ,  $h_3 = 149.2$ ,  $h_4 = 79.4$ ,  $h_5 = 89.3$  y  $h_6 = 69.3$ , calcula los valores de  $p_i$  para cada componente, sabiendo que el total de todos los valores  $p_i$  fue 21.53.

## Ejercicio 10

Existe un gran paralelismo entre los circuitos eléctricos y las masas en movimiento. Por ejemplo, sean los sistemas eléctrico y mecánico de la figura adjunta. El sistema eléctrico de la figura a) puede ser descrito por las cargas de los condensadores o por las intensidades que recorren las ramas. Análogamente, el sencillo sistema mecánico de la figura b) puede, a su vez, ser descrito mediante las posiciones, es decir, las coordenadas de sus partículas. Supongamos, por simplicidad, movimiento en una única dirección: entonces, es suficiente con una coordenada por partícula.



En este caso se está interesado en la oscilación natural de cada uno de dichos sistemas; por este motivo se considera ausencia de amortiguación (resistencias y rozamientos) y de acciones exteriores (voltajes impresos y movimientos autónomos). Las leyes eléctricas y mecánicas permiten describir la evolución de dichos sistemas; a saber, para el sistema eléctrico:

$$\frac{d\bar{i}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) & \frac{1}{L_1 C_2} \\ \frac{1}{L_2 C_2} & -\frac{1}{L_2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \bar{i}(t)$$

y para el sistema mecánico:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1(t)}{dt} \\ \frac{dy_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_1} (k_1 + k_2) & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{1}{m_2} (k_2 + k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A_2 \bar{y}(t)$$

Fácilmente se observa las semejanzas que existen entre los sistemas eléctricos y los sistemas mecánicos.

Por otra parte se puede demostrar que las frecuencias naturales a las que vibran los sistemas anteriores se pueden obtener a partir de los valores propios de las matrices  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Es decir:

$$\begin{aligned} \nu_1(m_1) &= \sqrt{\lambda_1} \\ \nu_2(m_2) &= \sqrt{\lambda_2} \end{aligned}$$

para el sistema mecánico. Entonces, suponiendo que  $m_1 = m_2 = 1$  y  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$  y  $k_3 = 2$  (en las unidades adecuadas), calcular las frecuencias de vibración de las masas del sistema mecánico,

## Ejercicio 11

Un problema típico en que se aplica la teoría espectral se encuentra en la metodología de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes (sobre todo, si el sistema es homogéneo). Sea, como ejemplo:

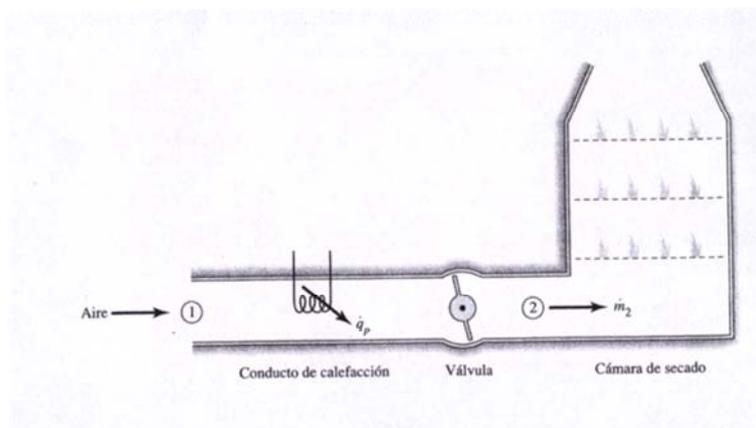
$$\frac{d\bar{Y}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1(x)}{dx} \\ \frac{dy_2(x)}{dx} \\ \frac{dy_3(x)}{dx} \\ \frac{dy_4(x)}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = AY(x) \quad [1]$$

El estudio espectral de la matriz  $A$  (deducción de los valores propios, de los vectores propios y de los subespacios propios) permite resolver problemas típicos (desacoplamiento de los modos principales, evolución de modelos en el espacio de los estados, reducción de orden en problemas de modelización matemática de sistemas reales, problemas de estabilidad, etc.). Algunas de estas aplicaciones se estudian en el segundo cuatrimestre de la asignatura **Fundamentos Matemáticos I**. La naturaleza de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales

$Y(x) = (y_1(x) \ y_2(x) \ y_3(x) \ y_4(x))^T$  depende del tipo (número real o complejo), del signo (de la parte real e imaginaria), así como del orden de multiplicidad de cada valor propio de la matriz A. Estudiar la información espectral de la matriz del sistema [1].

## Ejercicio 12

La figura adjunta muestra el modelo esquemático de un conducto de calefacción con regulación de flujo. Es decir, permite estudiar el secado de un material húmedo en una cámara aislada de secado con circulación de aire. El conducto proporciona a una cámara de secado de artículos húmedos a la que está unido aire caliente a una razón de flujo controlada. Si las propiedades del aire a la entrada del secador y el abastecimiento de energía en las bobinas de calefacción son conocidas, se puede demostrar que un modelo del secador aplicando la ley de Fick (que rige la tasa de difusión de la humedad dentro del producto a secar desde su interior hacia la superficie) viene dado por un modelo de tercer orden (un típico sistema no lineal):



$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{2m} x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 8\lambda^2 m x_1(t) - 5\lambda x_2(t) - 8\lambda^2 m q_e \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{1}{C_e} \left\{ -\frac{H}{2} x_2(t) + \frac{c_a + w_2 c_v}{1 + w_2} \dot{m}_2 [T_2 - x_2(t)] + \frac{c_w + c_v}{2} x_2(t) x_3(t) \right\} \end{cases} \quad [2]$$

donde:

t tiempo

$x_1(\cdot)$  contenido promedio de humedad (sobre una base seca) del producto en la cámara

$x_2(\cdot)$  dos veces la razón de pérdida de humedad del material

$x_3(\cdot)$  temperatura del material húmedo

m masa en seco del material húmedo

$q_e$	contenido en humedad en equilibrio (sobre una base seca)
$H$	calor latente de vaporización (de agua)
$C_e$	capacidad de calor húmedo equivalente del material
$c_a$	calor específico (a presión constante) del aire seco
$c_v$	calor específico (a presión constante) de la humedad
$c_w$	calor específico (a presión constante) del agua
$\dot{m}_2$	caudal del aire entrante
$w_2$	cociente de humedad del aire entrante
$T_2$	temperatura del aire entrante

Los sistemas reales (en este caso el secador) son normalmente sistemas no lineales. Para simplificar el estudio se aplican dos estrategias básicas en modelización de sistemas: primera, se estudia un sistema lineal sencillo, que describa el sistema no lineal (porque los sistemas lineales se conocen muy bien), y segunda, se añaden “detalles” al sistema lineal, que incluyan cualidades importantes del sistema real que no se incorporan de modo adecuado con el sistema lineal.

Para el modelo [1], se está interesado en controlar el secador dentro de la proximidad de un punto de operación  $\bar{X}_d = (x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})^T$  y un flujo nominal de aire húmedo  $\dot{m}_d$  utilizando sólo el contenido de humedad de equilibrio  $q_e$  y el flujo de aire húmedo en la cámara de secado  $\dot{m}_2$  (como entradas de control). La linealización del modelo no lineal [2] produce el siguiente sistema lineal (descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden):

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = A\hat{X}(t) + B\bar{U}(t) \quad [2]$$

$$\hat{X}(t) = \bar{X}(t) - \bar{X}_d = \bar{X}(t) - \bar{X}(t_d); \quad \bar{U}(t) = \begin{pmatrix} q_e - x_{1d} \\ \dot{m}_2 - \dot{m}_d \end{pmatrix}$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2m} & 0 \\ 8\lambda^2 m & -5\lambda & 0 \\ 0 & \frac{(c_w - c_v)x_{3d} - H}{2C_e} & \frac{(c_w - c_v)}{2C_e} x_{2d} - \frac{(c_a + w_2 c_v)}{C_e(1+w_2)} \dot{m}_d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8\lambda^2 m & 0 \\ 0 & \frac{(c_a + w_2 c_v)(T_2 - x_{3d})}{C_e(1+w_2)} \end{pmatrix}$$

Uno de los conceptos más útiles en teoría de sistemas lineales es el concepto de **estabilidad**. Hay diversos “matrices de estabilidad”; por ejemplo, la estabilidad BIBO

asegura que la salida de un sistema estará acotada siempre y cuando la entrada lo esté<sup>1</sup>. La misma idea se aplica a sistemas lineales descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes, teniendo en cuenta que ahora aparece una matriz (ver la matriz A en [2]). Un ingeniero de control desea saber si un modelo de secador descrito por

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 20 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \hat{X}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \bar{U}(t)$$

alcanzará un régimen estable (o lo que equivale a decir que el secador no se quemará, siempre que el voltaje de entrada satisfaga unas condiciones mínimas evidentes). Asimismo, estudiar la controlabilidad del secador.

## Ejercicio 13

Proponer diversas ecuaciones diferenciales y estudiar su comportamiento en el plano fásico  $\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$  para observar y analizar los diferentes comportamientos de la solución en lo que se refiere a su estabilidad.

---

<sup>1</sup> El concepto se puede entender para un sistema sencillo descrito por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden como  $\frac{dy(x)}{dx} = \phi y(x)$ ;  $\phi \in \mathbb{R}$  cuya solución es  $y(x) = e^{\phi x} + \text{constante}$ . Entonces,  $y(\cdot)$  estará acotada siempre y cuando  $x(\cdot)$  lo esté y  $\phi$  sea una cantidad con parte real negativa (si tuviera parte imaginaria,  $y(\cdot)$  tendría una componente oscilatoria).