Tema 4.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- ***SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES***
- ***TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS***
- ***MÉTODO DE GAUSS***

Muchas preguntas en ingeniería, física, matemáticas, economía y otras ciencias se reducen al problema de resolver un sistema lineal. El interés en la solución de esos sistemas es muy antiguo, como lo demuestra el *Problema del ganado* de **Arquímedes**. Veamos un problema donde interviene un sistema lineal, del que se ocuparon los matemáticos de hace ochocientos años.

Nuestra historia es acerca de Leonardo Pisano, matemático italiano (cerca 1175-1250), mejor conocido como **Fibonacci**. Durante sus viajes, aprendió la "nueva aritmética" árabe, que después presentó al Occidente es su famoso libro *Liber abaci*. Dice la leyenda que el emperador Federico II de Sicilia invitó a Fibonacci y a otros sabios a participar en una especie de torneo de matemáticas, en el que plantearon varios problemas. Uno de ellos era el siguiente:

Tres hombres poseen una sola pila de monedas, y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original, y cuánto tomó cada uno de esa pila?

Arquímedes (287-212 a.C.) es considerado el matemático y físico más grande de la antigüedad, así como uno de los matemáticos más importantes en la historia de la humanidad. Creció en Siracusa, una población griega en Sicilia. Pheidias su padre, fue astrónomo. Después de estudiar matemáticas en Alejandría, Egipto, Arquímedes regresó a Siracusa, donde permaneció el resto de su vida. Fue asesinado por un soldado, cuando la ciudad cayó en poder de los romanos.

Leonardo Pisano (cerca 1175-1250) es más conocido por su apodo Fibonacci. Jugó un rol muy importante al revivir las matemáticas antiguas y realizó importantes contribuciones propias.

Fibonacci nació en Italia pero fue educado en África del Norte donde su padre ocupaba un puesto diplomático. Viajó mucho acompañando a su padre, así conoció las enormes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países.

Liber abaci*, publicado en el 1202 después de retornar a Italia, esta basado en trozos de aritmética y álgebra que Fibonacci había acumulado durante sus viajes.* Liber abaci *introduce el sistema decimal Hindú-Arábico y usa los números arábicos dentro de Europa.*

Un problema en Liber abaci *permite la introducción de los números de Fibonacci y la serie de Fibonacci por las cuales Fibonacci es recordado hoy en día. El Diario Trimestral de Fibonacci es un moderno periódico dedicado al estudio de las matemáticas que llevan estas series.*

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

- *incógnitas:* $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- *coeficientes:* a_{ij}
- *términos independientes:* $b_1, b_2, \ldots, b_m$

★ ***Expresión vectorial:*** $x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + \cdots + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{b} \quad (2)$

donde: $\overline{a}'_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^m \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

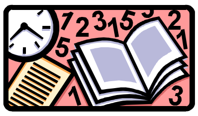
★ ***Expresión matricial:*** $A \cdot X = B \qquad (3)$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

★ ***Escribir en forma vectorial y matricial el sistema:***

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - 8x_2 + 7x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$



★ ***Escribir en forma matricial y en la forma usual el sistema de ecuaciones lineales cuya expresión vectorial es:***

$$x \cdot (2, 3, 1) + y \cdot (1, -2, 4) + z \cdot (1, 3, -1) = (6, 4, 0)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *son una solución de* (1) *si considerando:*

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$$

se satisfacen las m *ecuaciones del sistema.*

Sistema homogéneo.-

★
$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

★ $x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + \cdots + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0}$

★ $A \cdot X = (0)_{m \times 1}$

Todo sistema homogéneo tiene al menos una solución: la solución trivial o impropia

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

Subespacio vectorial de las soluciones de un sistema homogéneo.-

$\mathbf{S_h}$, *el conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo* (4) *es un* ***subespacio vectorial de*** $\mathbb{R}^n$

Relación entre los conjuntos solución de un sistema de ecuaciones lineales (S) *y su sistema homogéneo asociado* (S_h) .-

$$\mathbf{S} = \{\overline{\mathbf{x}}_0 + \overline{\mathbf{z}} \,/\, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbf{S_h}\}$$

$\overline{\mathbf{x}}_0$: *es una solución de un sistema* (1)

$\mathbf{S_h}$: *conjunto de las soluciones del sistema homogéneo* (4) *asociado al sistema* (1)

-EJEMPLO.-

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \{(0, 1-a, a)/a \in \mathbb{R}\}$$

S no es subespacio vectorial. ¿Por qué?

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S_h} = \{(0, -a, a)/a \in \mathbb{R}\}$$

S_h es subespacio vectorial. ¿Por qué?

$\overline{\mathbf{x}}_0 = (0, 1, 0)$ $\quad a = 0$

$$\mathbf{S} = \{\overline{\mathbf{x}}_0 + \overline{\mathbf{z}}/\overline{\mathbf{z}} \in \mathbf{S_h}\} = \{(0,1,0) + (0,-a,a)/a \in \mathbb{R}\} = \\ = \{(0, 1-a, a)/a \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad AM = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matriz de coeficientes *Matriz ampliada*

- ***Sistema incompatible:*** *no tiene soluciones*

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{array}\right\}$$

- ***Sistema compatible determinado:*** *tiene una única solución*

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right\} \quad \underline{x_1 = 2\ ,\ x_2 = 0}$$

- ***Sistema compatible indeterminado:*** *tiene infinitas soluciones*

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \quad \underline{x_1 = 0\ ,\ x_2 = 1 - a\ ,\ x_3 = a\ \ \forall a \in \mathbb{R}}$$

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

A : *matriz de coeficientes del sistema*

AM : *matriz ampliada del sistema*

n : *número de incógnitas del sistema*

- $r(A) = r(AM) = n \implies$ sistema compatible determinado
- $r(A) = r(AM) < n \implies$ sistema compatible indeterminado
- $r(A) < r(AM) \implies$ sistema incompatible

Para sistemas homogéneos

- $r(A) = n \implies$ S.C.D. , $S_h = \{\bar{0}\}$
- $r(A) = r < n \implies$ S.C.I. , $\dim S_h = n - r$

Si $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{AM}) = \mathbf{r}$ *y* $\mathbf{M_r} \neq \mathbf{0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & & b_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_r$: ***incógnitas principales***

$E1, E2, \ldots, Er$: ***ecuaciones principales***

$\dim(S_h) = n - r =$ ***nro. incógnitas NO principales,*** *también denominadas* ***incógnitas libres*** **:** $x_{r+1}, \ldots, x_n$

-EJEMPLO.-

✶ $\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{array}\right\}$ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{1} < \mathbf{2} = \mathrm{r}(\mathbf{AM}) \Longrightarrow$ S.I.

✶ $\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right\}$ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{AM}) = \mathbf{2} = \mathbf{n} \Longrightarrow$ S.C.D.

✶ $\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\}$ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{AM}) = \mathbf{2} < \mathbf{n} = \mathbf{3} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ S.C.I.

$$\mathbf{AM} = \left(\begin{array}{|cc|c|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$M_2 \neq 0$

x_1, x_2 : ***incógnitas principales***

$E1, E2$: ***ecuaciones principales***

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 + x_2 = 1 - x_3 \end{array}\right\}$$

$\dim S_h = ?$

SISTEMAS EQUIVALENTES

*Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen **equivalentes** si tiene las mismas soluciones.*

¿Cómo conseguir sistemas equivalentes?

Si las matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, entonces los sistemas son equivalentes.

MÉTODO DE GAUSS

*En esta sección estudiamos el método que utilizamos normalmente para resolver sistemas de ecuaciones lineales y que se suele denominar **eliminación gaussiana**. Matemáticos chinos usaron un método de eliminación similar para sistemas de ecuaciones lineales aproximadamente en el 250 a.C. El proceso se desconoció en la cultura occidental hasta el siglo XIX, cuando un famoso matemático alemán, **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855), lo descubrió. Un ingeniero alemán, **Wilhelm Jordan** (1842-1899), popularizó el algoritmo en un texto de 1888 sobre geodesia.*

Obtener un sistema equivalente de discusión y resolución inmediatas (en caso de ser compatible).

Conseguir una matriz equivalente a la matriz ampliada AM ***del sistema*** (1) ***en forma escalonada.***

Si denominamos ***entrada principal*** de una fila a la entrada diferente de cero que está más a la izquierda en una fila no nula, diremos que una matriz está en ***forma escalonada*** si tiene las siguientes tres propiedades:

1.- Todas las filas diferentes de cero están arriba de cualquier fila nula.

2.- Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de una fila superior.

3.- Todas las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.

RECORDAR

Teorema de la matriz invertible.- *Sea* A *una matriz cuadrada de orden* n*. Entonces los enunciados que siguen son equivalentes.*

1.- A *es una matriz invertible.*
2.- A *es una matriz regular.*
3.- A *es equivalente por filas a la matriz* I_n*, es decir:* $A \sim I_n$.
4.- Los vectores columna de A *son linealmente independientes.*
5.- Los vectores columna de A *generan* $\mathbb{R}^n$.
6.- Los vectores columna de A *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.
7.- Los vectores fila de A *son linealmente independientes.*
8.- Los vectores fila de A *generan* $\mathbb{R}^n$.
9.- Los vectores fila de A *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.
10.- A^T *es una matriz invertible.*
11.- Existe una matriz B *cuadrada de orden* n *tal que* $A \cdot B = I_n$.
12.- Existe una matriz C *cuadrada de orden* n *tal que* $C \cdot A = I_n$.
13.- $r(A) = n$.
14.- $\det A \neq 0$.
15.- El sistema homógeneo $A \cdot x = 0$ *tiene solamente la solución trivial.*
16.- El sistema $A \cdot x = b$ *es siempre compatible determinado y la solución viene dada por:* $x = A^{-1} \cdot b$.

El teorema de la matriz invertible divide el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n *en dos clases disjuntas:*

(I) las matrices invertibles (regulares o no singulares) y

(II) las matrices no invertibles (singulares).

Cada enunciado del teorema describe una propiedad de toda matriz cuadrada de orden n *invertible. La* ***negación*** *de un enunciado del teorema describe una propiedad de toda matriz singular cuadrada de orden* n*. Por ejemplo, una matriz singular cuadrada de orden* n ***no*** *es equivalente por filas a* I_n*,* ***no*** *es de rango* n*, y tiene columnas linealmente* ***dependientes****.*

La fuerza del teorema de la matriz invertible radica en las conexiones que establece entre tantos conceptos importantes, como la independencia lineal de las columnas (filas) de una matriz A *y la existencia de soluciones para ecuaciones de sistemas lineales de la forma* $A \cdot x = b$*. Sin embargo, se debe subrayar que el teorema de la matriz invertible* <u>*se aplica solamente a matrices cuadradas*</u>*. Por ejemplo, si las columnas de una matriz* 4×3 *son linealmente independientes, no podemos usar el teorema de la matriz invertible para sacar conclusiones acerca de la existencia o no existencia de soluciones de ecuaciones de la forma* $A \cdot x = b$*.*