# *Tema 1.- MATRICES*

- **MATRICES** $\mathcal{M}_{\mathbf{m\times n}}(\mathbb{R})$
- **PRODUCTO DE MATRICES**
- **POTENCIAS NATURALES DE MATRICES CUADRADAS**



## *Un poco de historia*

Lord **Cayley** es uno de los fundadores de la teoría de las matrices, aunque su amigo **Sylvester** fue quien acuñó el término *matriz* (1850), para distinguir las matrices de los determinantes, que serán estudiados en el Tema 3. De hecho, la intención era que el término *matriz* tuviera el significado de “madre de los determinantes”. Tanto Sylvester como Cayley son considerados entre los mejores matemáticos de su tiempo. Sylvester fue el primer profesor del Departamento de Matemáticas en la Universidad John Hopkins, y fundó la prestigiosa revista *American Journal of Mathematics*.

***(Sir) Arthur Cayley (1821-1895) nació en Surrey, Inglaterra, y estudió en la Universidad de Cambridge. Ejerció la abogacía y al mismo tiempo escribía aportaciones en matemáticas. Pocos años después de encontrar a su colega Sylvester, otro licenciado y matemático, dejó la abogacía y se dedicó de tiempo completo a las matemáticas.***

***James Joseph Sylvester (1814-1897) nació en Londres, de padres judíos. Entró en la Universidad de Cambridge, pero por su religión no pudo obtener un diploma, sino hasta varios años después de haber terminado sus estudios. También ejerció la abogacía y al mismo tiempo hacía investigaciones en el campo de las matemáticas. Él y Cayley tuvieron una larga y fructífera colaboración en la teoría de los invariantes, campo relacionado con el Álgebra Lineal.***

A continuación veamos un ejemplo de lo que ocupaba a Cayley. Tres sistemas coordenados (x , y), (x' , y') y (x'' , y'') están conectados mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{matrix} x'' = x' - y' \\ y'' = x' + y' \end{matrix} \quad \mathbf{y} \quad \begin{matrix} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y \end{matrix}$$

La relación entre (x , y) y (x'' , y'') se describe con la sustitución:

$$\begin{matrix} x'' = x' - y' = (x + 2y) - (2x - y) = -x + 3y \\ y'' = x' + y' = (x + 2y) + (2x - y) = 3x + y \end{matrix}$$

Esta transformación también puede escribirse como sigue: si abreviamos los tres cambios de coordenadas mediante las matrices de los coeficientes, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora es posible calcular C directamente de A y B, mediante la multiplicación matricial: C = A · B.



*Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:*

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{matrix}$$

- ✶ *incógnitas:* $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- ✶ *coeficientes:* $a_{ij}$
- ✶ *términos independientes:* $b_1, b_2, \ldots, b_m$

*La teoría de matrices ofrece la posibilidad de trabajar cómodamente con modelos de gran dimensión, tanto en número de variables, como de ecuaciones o datos, ya que brinda una notación simple y compacta para designar amplios conjuntos de información. Esto redunda a su vez en una mayor facilidad a la hora de trabajar con estos conjuntos de datos desde un punto de vista computacional.*

*La teoría de matrices no sólo debe su importancia a la bondad de sus cualidades operativas, sino que además tiene gran relevancia teórica, ya que una matriz es la representación de determinadas transformaciones vectoriales (aplicaciones lineales)*



# MATRICES

## MATRIZ DE ORDEN $m \times n$ .-

*Toda distribución de elementos* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *dispuestos en* $m$ *filas y* $n$ *columnas*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

COLUMNA
$j = \{1, 2, \ldots, n\}$

FILA
$i = \{1, 2, \ldots, m\}$

*Habitualmente se denotan las matrices con letras mayúsculas ( A, B, C,.. ) y con minúsculas los elementos que las constituyen. Dado que los elementos están ordenados en filas y columnas, al elemento que en una matriz ocupa el lugar de la fila* $i$*-ésima y la columna* $j$*-ésima se le denotará por* $a_{ij}$ *. Es decir, con el primer subíndice* $i$ *se indica la fila en la que está el elemento y con el segundo subíndice* $j$ *, la columna.*

*Dos matrices del mismo orden* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *y* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *se dicen iguales, y se escribe* $A = B$ *si:*

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\,(i,j) \in I \times J$$

✶ ***Matriz fila:*** $(1 \times n)$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$

✶ ***Matriz columna:*** $(m \times 1)$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

✶ ***Matriz nula:*** $(0)_{m\times n}$ *todos sus elementos son* **0.**

✶ ***Matriz opuesta de*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $: -A = (-a_{ij})_{m\times n}$



✶ ***Matriz cuadrada*** *de orden* **n:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Mismo número de filas que de columnas*

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *forman la diagonal principal*

*Los siguientes conceptos se refieren exclusivamente a matrices cuadradas:*

✶ **Matriz triangular superior**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Ceros debajo de la diagonal principal*

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i > j$$

✶ **Matriz triangular inferior**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Ceros encima de la diagonal principal*

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i < j$$



✶ **Matriz diagonal**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Ceros fuera de la diagonal principal*

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

✶ **Matriz escalar**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

✶ **Matriz unidad**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

*Ceros fuera de la diagonal principal, unos en la diagonal principal*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

*Delta de Kronecker*

## SUMA DE MATRICES.
## PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ : *conjunto de todas las matrices de orden* $m \times n$ *con elementos reales.*

La aritmética para vectores que se describió en el tema anterior admite una extensión natural a las matrices. Si **A** y **B** son matrices $m \times n$, entonces la **suma** **A + B** es la matriz $m \times n$ cuyas columnas son las sumas de las columnas correspondientes de A y B. Puesto que la suma vectorial de las columnas se hace por entradas, cada entrada en A + B es la suma de las entradas correspondientes de A y B. **La suma A + B está definida sólo cuando A y B son del mismo tamaño**.

Si r es un escalar y **A** es una matriz, entonces el **múltiplo escalar** r · **A** es la matriz cuyas columnas son r veces las columnas correspondientes de **A**. Al igual que con vectores, definimos **–A** como (–1) · **A** y escribimos **A – B** en vez de **A + (–1) · B**.



## SUMA DE MATRICES.- (*Operación interna en* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

*Sean* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ , $B = (b_{ij})_{m\times n}$

★ $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

**A y B** ***tienen que tener el mismo orden***

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

★ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

## PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.-

*(Operación externa en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$ )*

***Sean*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$

✶ $\lambda \cdot \mathbf{A} = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n}$

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \cdots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \cdots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

✶ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (-3)\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$



## PRODUCTO DE MATRICES

*Si* $\mathbf{A}$ *es una matriz* $\mathbf{m\times n}$ *y* $\mathbf{B}$ *es una matriz* $\mathbf{n\times p}$ *, se define la* ***matriz producto*** $\mathbf{C = A\cdot B}$, ***en este orden***, *como la matriz* $\mathbf{m\times p}$ *tal que:*

$$\mathbf{C = A\cdot B = (c_{ij})_{m\times p}} \quad ; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\textit{fila i de A}} \underbrace{b_{kj}}_{\textit{columna j de B}}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix}_{n\times p}$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nj}}$$

**-ATENCIÓN.-** **Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.**

**-Ejemplo.-**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot 4 & 2\cdot 2+1\cdot(-2) \\ 0\cdot 3+(-3)\cdot 4 & 0\cdot 2+(-3)\cdot(-2) \\ 1\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -12 & 6 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$$

***Propiedades del producto de matrices.-***

*1.-* $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

*2.-* $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

*3.-* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$

*4.-* ***El producto de matrices no es necesariamente conmutativo***



✶ $\underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(3\times 1)}{\mathbf{B}}$ se puede hacer este producto, pero no se puede hacer $\cancel{\underset{(3\times 1)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}}}$

✶ $\underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(3\times 2)}{\mathbf{B}}$ es una matriz $\mathbf{2\times 2}$

$\underset{(3\times 2)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}}$ es una matriz $\mathbf{3\times 3}$

✶

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*-OBSERVACIONES.-*

*1.- **El producto de matrices no es necesariamente conmutativo.***

*2.- Puede ser* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(0)$ *con* $\mathbf{A}\neq(0)$ *y* $\mathbf{B}\neq(0)$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad \mathrm{y}\quad \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

*3.-* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$

*4.-* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ *no implica necesariamente* $\mathbf{B}=\mathbf{C}$ .

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}=(0)_{2\times 2}$$



# POTENCIAS NATURALES DE MATRICES CUADRADAS

Una de las herramientas principales en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales es el álgebra matricial. En concreto, el cálculo de potencias naturales de matrices cuadradas resulta de gran interés en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Además, las potencias de matrices desempeñan un papel importante en diversas aplicaciones, como por ejemplo en el modelo de Leontief de entrada-salida.

*Si* $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *y* $\mathbf{p}\in\mathbb{N}$ *:*

$$\mathbf{A}^{\mathbf{p}}=\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\cdots\cdot\mathbf{A}}_{\mathbf{p}\ \text{veces}}$$

$$\mathbf{A}^{0}=\mathbf{I}\in\mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$$

*-PROPIEDADES.-*

*1.-* $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A}^{\mathbf{q}}=\mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$

*2.-* $(\mathbf{A}^{\mathbf{p}})^{\mathbf{q}}=\mathbf{A}^{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}$

## TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ : $\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

*Cambiar filas por columnas*

**-PROPIEDADES.-**

*1.-* $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

*2.-* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

*3.-* $(\lambda \cdot \mathbf{A})^T = \lambda \cdot \mathbf{A}^T$

*4.-* $(\lambda \cdot \mathbf{A} + \mu \cdot \mathbf{B})^T = \lambda \cdot \mathbf{A}^T + \mu \cdot \mathbf{B}^T$

*5.-* $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ *Atención*



*Las matrices (cuadradas) simétricas y antisimétricas se pueden caracterizar utilizando la relación que tienen con sus traspuestas.*

*Sólo para matrices cuadradas*

- **A simétrica** *si y sólo si* $a_{ij} = a_{ji}$ *, es decir:*

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

- **A antisimétrica** *si y sólo si* $a_{ij} = -a_{ji}$ *, es decir:*

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$$

*¿Cómo son los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica?*

***A continuación estudiamos ciertas matrices que deben su peculiaridad al comportamiento que presentan sus potencias. Las matrices idempotentes, por ejemplo, desempeñan un papel importante en algunas áreas de la Estadística y la Econometría.***

*Sólo para matrices cuadradas*

- **A periódica** *si* $\exists \mathbf{p} \in \mathbb{N} \,/\, \mathbf{A}^{\mathbf{p}+1} = \mathbf{A}$. *Si* p *es el menor número natural que satisface* $\mathbf{A}^{\mathbf{p}+1} = \mathbf{A}$ *, entonces decimos que* A *es una matriz periódica de* **período p**.
- **A idempotente** *si* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.
- **A nilpotente** *si* $\exists \mathbf{p} \in \mathbb{N} \,/\, \mathbf{A}^{\mathbf{p}} = (0)_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *. Si* p *es el menor número natural que satisface* $\mathbf{A}^{\mathbf{p}} = (0)_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *, decimos que* A *es una matriz nilpotente de* **índice p**.
- **A involutiva** *si* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.



**CONCEPTO DE MATRIZ RECTANGULAR**

*Casos especiales*

***Matriz fila***
***Matriz columna***
***Matriz nula***
***Matriz cuadrada***
***Matriz triangular superior***
***Matriz triangular inferior***
***Matriz diagonal***
***Matriz escalar***
***Matriz unidad***

**ÁLGEBRA DE MATRICES**

Igualdad
Suma/Resta
Multiplicación por un escalar
Producto
Potenciación entera
Trasposición — **Propiedades**

Determinante
Inversión

***Matrices especiales***

Matriz periódica
Matriz idempotente
Matriz nilpotente
Matriz involutiva

Matriz simétrica
Matriz antisimétrica

$\mathcal{M}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

**es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial**