Tema 3.- MATRICES INVERTIBLES

- ***MATRICES INVERTIBLES***
- ***TÉCNICAS PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR***

Hemos hablado anteriormente de la matriz cuadrada unidad de orden **n** **(I_n).** ***Es posible encontrar matrices cuadradas*** **A** ***para las cuales existe una matriz cuadrada*** **B** ***de forma que***

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices cuadradas son muy interesantes y reciben un nombre especial: matrices invertibles o matrices inversibles. En este capítulo enseñamos cómo distinguir las matrices invertibles a través de su determinante y explicamos métodos para calcular de un modo eficaz la inversa de **A.**

Las matrices invertibles son indispensables en el Álgebra Lineal, principalmente para cálculos algebraicos y deducciones de fórmulas. Hay también ocasiones en las que una matriz inversa permite entender mejor un modelo matemático de una situación de la vida real.

- $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ es ***regular*** si $\det \mathbf{A} \neq 0$
- $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ es ***singular*** si $\det \mathbf{A} = 0$

- $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ es ***invertible*** si

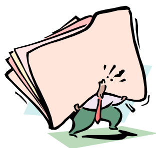
$$\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

esta matriz $\mathbf{B}$ *es única y se denomina inversa de* $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

MATRICES INVERTIBLES

- $\mathbf{A}$ invertible $\iff$ $\mathbf{A}$ regular $(\det \mathbf{A} \neq 0)$
- ***Si*** $\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ ***tal que*** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ***o*** $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ***entonces*** $\mathbf{A}$ ***es regular y*** $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$
- $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}\cdot\tilde{\mathbf{A}}$ *con* $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}')^{\mathbf{T}}$



siendo $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de* $\mathbf{A}$ *por sus adjuntos.*

Esta fórmula apenas se utiliza en la práctica

Técnicas útiles para calcular la inversa de una matriz regular A

- ***Operaciones elementales de filas***

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \overset{O_1}{\sim} (\mathbf{A_1}|\mathbf{B_1}) \overset{O_2}{\sim} (\mathbf{A_2}|\mathbf{B_2}) \overset{O_3}{\sim} \dots \overset{O_n}{\sim} (\mathbf{I}|\mathbf{A^{-1}})$$

- ***Resolución de un sistema de ecuaciones lineales***

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X}=\mathbf{A^{-1}}\cdot\mathbf{Y}$$

- ***Matrices que satisfacen una ecuación del tipo:***

$$\alpha_m\cdot\mathbf{A^m}+\alpha_{m-1}\cdot\mathbf{A^{m-1}}+\dots+\alpha_1\cdot\mathbf{A}+\alpha_0\cdot\mathbf{I}=(\mathbf{0}) \quad ; \quad \alpha_0\neq 0$$

$$\mathbf{A}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\alpha_m}{\alpha_0}\cdot A^{m-1}-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}\cdot A^{m-2}-\dots-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot I}_{\mathbf{A^{-1}}}\right)=\mathbf{I}$$

- ***Operaciones elementales de filas***

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \overset{O_1}{\sim} (\mathbf{A_1}|\mathbf{B_1}) \overset{O_2}{\sim} (\mathbf{A_2}|\mathbf{B_2}) \overset{O_3}{\sim} \dots \overset{O_n}{\sim} (\mathbf{I}|\mathbf{A^{-1}})$$

***¿Cómo llegamos a la matriz unidad* I?**

Conseguimos ceros debajo de la diagonal principal

Conseguimos unos en la diagonal principal

Sin deshacer lo conseguido:
conseguimos ceros encima de la diagonal principal

-EJEMPLO.- Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2}F_2 \\ \sim \\ \frac{1}{2}F_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_1 + F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

***Sugerencia.-* Comprobar el resultado** ⟵ $A \cdot A^{-1} = I$

-EJEMPLO.- *Resolución de un sistema de ecuaciones lineales:*

Esta técnica suele resultar útil para matrices triangulares

$$A \cdot X = Y \implies X = A^{-1} \cdot Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{lrcl} E1: & x_1 - x_3 & = & y_1 \\ E2: & 2x_2 & = & y_2 \\ E3: & x_1 + x_3 & = & y_3 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \end{array} \right.$$

Escribiendo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

***Sugerencia.-* Comprobar el resultado** ⟵ $A \cdot A^{-1} = I$

-EJEMPLO.- *Matrices que satisfacen una ecuación del tipo:*

$$\alpha_m \cdot A^m + \alpha_{m-1} \cdot A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I = (0) \quad ; \quad \alpha_0 \neq 0$$

Sea A *una matriz regular que satisface la ecuación:*

$$A^3 - 2A^2 - 4A - 2I = (0)$$

Calcular A^{-1}

$$2I = A^3 - 2A^2 - 4A$$

$$I = \frac{1}{2}A^3 - A^2 - 2A$$

$$I = A \cdot \left(\frac{1}{2}A^2 - A - 2I\right)$$, luego, según la definición:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - A - 2I$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES REGULARES

$\mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *: matrices regulares de orden* n

Sean $A, B \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$

1.- $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

2.- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Atención

3.- $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

4.- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5.- $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$

6.- $(\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$

7.- Si A *es triangular, entonces* A^{-1} *es triangular.*

Enunciamos a continuación un teorema que nos permite caracterizar las matrices invertibles en varias formas básicas, utilizando conceptos estudiados previamente:

Teorema de la matriz invertible.- *Sea* A *una matriz cuadrada de orden* n. *Entonces los enunciados que siguen son equivalentes. Esto es, para una matriz* A *dada, los enunciados son o todos ciertos o todos falsos.*

1.- A *es una matriz invertible.*

2.- A *es una matriz regular.*

3.- A *es equivalente por filas a la matriz* I_n, *es decir:* $A \sim I_n$.

4.- *Los vectores columna de* A *son linealmente independientes.*

5.- *Los vectores columna de* A *generan* $\mathbb{R}^n$.

6.- *Los vectores columna de* A *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.

7.- *Los vectores fila de* A *son linealmente independientes.*

8.- *Los vectores fila de* A *generan* $\mathbb{R}^n$.

9.- *Los vectores fila de* A *forman una base de* $\mathbb{R}^n$.

10.- A^T *es una matriz invertible.*

11.- *Existe una matriz* B *cuadrada de orden* n *tal que* $A \cdot B = I_n$.

12.- *Existe una matriz* C *cuadrada de orden* n *tal que* $C \cdot A = I_n$.

13.- $r(A) = n$.

14.- $\det A \neq 0$.

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO DE MATRICES REGULARES

Cuando $A \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *es decir es una matriz regular de orden* n, *o lo que es lo mismo, una matriz invertible, tiene sentido hablar de potencias de* A *con exponente entero, como por ejemplo:*

$$A^{-2}, A^{-3}, \ldots$$

Si $A \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y* $p \in \mathbb{N}$:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$$

$$A^0 = I \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

-PROPIEDADES.-

1.- $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$

2.- $(A^p)^q = A^{p\cdot q}$

MATRICES ORTOGONALES

$\mathbf{A} \in \mathcal{R}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ se dice ***ortogonal*** si:

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$, es decir : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$

Su inversa y su traspuesta coinciden

-PROPIEDADES.- *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{O}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

1.- $\det \mathbf{A} = \mathbf{1}$ o $\det \mathbf{A} = -\mathbf{1}$

2.- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{O}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

3.- $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \in \mathcal{O}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

4.- $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Nuestra primera observación acerca de las matrices ortogonales es que son matrices invertibles.

Se cumple también que la inversa de una matriz ortogonal es su traspuesta. En este caso no hay que hacer inversiones complicadas.

Las matrices ortogonales surgirán de nuevo en el curso en el capítulo 7.

Matriz regular
Matriz singular

Matriz invertible

Resultado fundamental

PROPIEDADES

MÉTODOS DE CÁLCULO

POTENCIACIÓN ENTERA

MATRIZ ORTOGONAL

Propiedades

Matriz de cambio de base