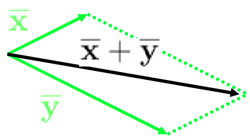
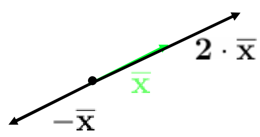
Tema 5.- ESPACIOS VECTORIALES

- ***ESPACIO VECTORIAL***
- ***SUBESPACIO VECTORIAL***
- ***BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL***

Aunque históricamente el primer trabajo de Álgebra Lineal consistió en resolver sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, comenzaremos este curso estudiando la estructura de espacio vectorial.

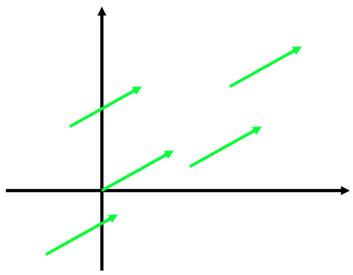
Los vectores libres del plano (del espacio) pueden sumarse unos con otros (por la "ley del paralelogramo") y multiplicarse por un número real:





Pero, ¿qué es un vector libre del plano?

Definimos $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de vectores (x_1, x_2) con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector de $\mathbb{R}^2$ (definición algebraica de vector), y viceversa. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene "longitud" y "dirección".



Tanto en Física como en Ingeniería un vector se caracteriza por dos magnitudes (longitud y dirección) y se representa por un segmento recto dirigido. Un vector en el plano puede ubicarse en diferentes lugares. Sin embargo, con independencia de dónde esté situado, si la longitud y dirección no varían se trata del mismo vector.

El conjunto de los vectores libres del plano ($\mathbb{R}^2$) es sólo un ejemplo entre los muchos ejemplos de objetos matemáticos que pueden sumarse entre sí y multiplicarse por números reales, y que además satisfacen unas mismas propiedades. Este ejemplo de los vectores libres del plano (o el de los vectores libres del espacio) es importante porque su representación geométrica ayuda a entender la definición general de vector.

Algunos ejemplos que podemos mencionar son:

- ✓ *los propios números reales,*
- ✓ *los números complejos,*
- ✓ *los vectores en el plano,*
- ✓ *los vectores en el espacio,*
- ✓ *los polinomios de grado menor o igual que* n,
- ✓ *las funciones reales de variable real con dominio* D,
- ✓ *las funciones continuas en un intervalo,*
- ✓ *las funciones derivables en un punto,*
- ✓ *las funciones integrables en un intervalo,*
- ✓ ....

Un vector puede ser un número, una n-tupla, un polinomio, una función continua, etc.

También hay magnitudes físicas de tipo vectorial con las mismas propiedades: fuerzas, velocidades, aceleraciones,....

Cuando en varios conjuntos distintos aparecen estructuras similares, es conveniente axiomatizar éstas y dar un nombre al ente resultante. Aunque este primer tema tiene el inconveniente de trabajar en el mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios, también presenta una gran ventaja. La abstracción resulta ser matemáticamente eficiente en el sentido de que ahora pueden demostrarse resultados generales cuya validez afecta a todos los espacios vectoriales. Es decir, una vez que se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales en general, se pueden aplicar estos hechos a todos los espacios vectoriales. De otro modo, habría que probar cada hecho una y otra vez, para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existen un sin fin de ellos).

En este curso, básicamente trabajaremos con cuatro espacios vectoriales.

En el tema 1 definimos la estructura de espacio vectorial y trabajaremos con los espacios vectoriales siguientes:

- ⋆ $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ *, normalmente* n=3 *o* n=4.
- ⋆ $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$ *, normalmente* n=2 *o* n=3.

En el tema 2 estudiamos el espacio vectorial de las matrices reales de m *filas y* n *columnas, que denotamos:* $\mathcal{M}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Por último, en el tema 6 trabajaremos también con espacios vectoriales de funciones reales de variable real y continuas sobre un intervalo.

A continuación, presentamos un ejemplo introductorio que proporciona una motivación para desarrollar las matemáticas subsecuentes.

Un poco de historia

El matemático alemán **Grassmann** es reconocido como el primero que introdujo la idea de un espacio vectorial (aunque no lo llamó de esta manera, sino *sistema de números hipercomplejos*) y de independencia lineal en 1844. Desafortunadamente su trabajo era muy difícil de leer y no recibió la atención que merecía.

Peano en su libro *Calcolo geometrico* (1898) acalaró el trabajo de Grassmann y estableció los axiomas de espacio vectorial como los conocemos en la actualidad. En este mismo libro introdujo las operaciones de conjuntos. Sus notaciones $\cup$, $\cap$ y $\in$ son las que todavía utilizamos, aunque no fueron aceptadas de inmediato. La definición axiomática de Peano de un espacio vectorial también tuvo muy poca influencia durante muchos años. Su aceptación se produjo en 1918, después de que **Hermann Weyl** la repitiera en su libro *Space, time, matter*, una introducción a la teoría de la relatividad general de Einstein.

También podemos mencionar a **William R. Hamilton**, que durante los veinte últimos años de su vida, dedicó la mayor parte de su creación matemática a desarrollar la tería de un tipo especial de números, los *cuaterniones*. Con estos trabajos cimentó la moderna noción de vector. Todavía hoy se utiliza la notación **i**, **j**, **k** de Hamilton para los vectores de la base canónica en el espacio tridimensional.

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL REAL

Sean $\mathbb{R}$ ***(cjto. números reales) y*** $\mathbf{V} \neq \emptyset$

★ $\begin{array}{ccc} \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \xrightarrow{(+)} & \mathbf{V} \\ (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \end{array}$ ***operación interna en*** $\mathbf{V}$

★ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbf{V} & \xrightarrow{(\cdot)} & \mathbf{V} \\ (\alpha, \overline{\mathbf{x}}) & \hookrightarrow & \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \end{array}$ ***operación externa en*** $\mathbf{V}$ ***con dominio de operadores*** $\mathbb{R}$

Definiremos cuando $\mathbf{V}$ ***es un espacio vectorial real***

$$(\,\mathbb{R}\text{–}\mathbf{e.v.}\,)$$

Como hemos visto, partimos de un conjunto <u>no vacío</u> V , cuyos elementos se denotan $\overline{x}, \overline{y}$,..., y se denominan <u>vectores</u> y del cuerpo conmutativo (estructura algebraica) de los números reales. En general se puede trabajar con cualquier cuerpo conmutativo K y en este curso surgirán algunos ejercicios con espacios vectoriales complejos (K= $\mathbb{C}$).

La ley de composición interna se suele denotar con el símbolo de la suma (+) y se suele denominar <u>suma</u> de vectores. Es una aplicación que a cada par de elementos $\overline{x}, \overline{y}$ de V les hace corresponder el elemento, <u>también de V</u>, $\overline{x}+\overline{y}$, denominado suma de $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

La ley de composición externa con dominio de operadores (en general, con dominio de operadores K) es una aplicación que denominamos producto por un escalar y denotamos con el símbolo del producto (•) que a todo elemento $\overline{x}$ de V y a todo elemento α de $\mathbb{R}$ (o K) hace corresponder el elemento $\alpha \cdot \overline{x}$.

<u>OBSERVACIÓN</u>.- ¿Es la suma de polinomios una ley de composición interna sobre el conjunto de los polinomios de grado <u>exactamente</u> 2?

<u>ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL</u>

$\mathbf{V} = \{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}, \dots\}$ es un $\mathbb{R}$–e.v. cuando:

1.- ***Para (+) (operación interna) se cumple:***

- $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}: \ \overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{z}}$
- $\exists \overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{V} \,/\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{x}} \quad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$ $(\overline{0}: \text{ vector nulo})$
- $\forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V} \quad \exists \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V} \,/\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{0}}$ $(\overline{y} = -\overline{x}: \text{ vector opuesto})$
- $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}: \ \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} + = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}}$

2.- ***Para (•) (op. externa con dominio $\mathbb{R}$) se cumple:***

a.– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}: \ (\alpha + \beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \beta \cdot \overline{\mathbf{x}}$
b.– $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}: \ \alpha \cdot (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \alpha \cdot \overline{\mathbf{y}}$
c.– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}: \ \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{\mathbf{x}}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{\mathbf{x}}$
d.– $\forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}: \ \mathbf{1} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$

Los elementos de un espacio vectorial reciben el nombre genérico de vectores y en general se utiliza la notación vectorial ($\overline{x}, \overline{y}$,...) para denotarlos. Esto no es obstáculo para que en algunos casos particulares (polinomios, matrices, funciones,...) se utilice la notación propia en cada caso.

Los axiomas 1.- de la definición de espacio vectorial real se refieren a la suma de vectores, los axiomas 2.- c.- y 2.- d.- se refieren exclusivamente a la multiplicación por escalares (números reales) y las propiedades 2.- a.- y 2.- b.- son las propiedades distributivas de una operación con respecto a otra.

A continuación presentamos varios ejemplos de espacios vectoriales. Para comprobar que tienen estructura de espacio vectorial deberíamos ver que se satisfacen los 8 axiomas de la definición con las operaciones suma y producto por un escalar definidas. Este trabajo es muy sencillo y se basa exclusivamente en propiedades de los números reales (no olvidar que estamos trabajando, en principio, con espacios vectoriales reales). Dado que también es una labor muy tediosa omitiremos las comprobaciones, pero hay que insistir en que es absolutamente necesario comprobar los 8 axiomas.

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

-EJEMPLO 1.- $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in \mathbb{R} \,,\; i = 1, 2, 3\}$

conjunto de los vectores libres del espacio

☆ *¿Cómo se suman dos vectores libres?*

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

☆ *¿Cómo se multiplica un vector por un número real?*

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$$

☆ *¿Cuál es el vector nulo?*

$$\overline{0} = (0, 0, 0)$$

-EJEMPLO 2.-

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R} \;,\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

☆ *¿Cómo se suman dos vectores libres?*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

☆ *¿Cómo se multiplica un vector por un número real?*

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

☆ *¿Cuál es el vector nulo?*

$$\overline{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n} \in \mathbb{R}^n$$

-EJEMPLO 3.- *Conjunto de los polinomios de grado menor o igual que* **n.**

$$\mathcal{P}_n = \left\{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,/\, a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

☆ *¿Cómo se suman dos polinomios?*

(coeficiente a coeficiente)

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

☆ *¿Cómo se multiplica un polinomio por un número real?*

(se multiplica cada coeficiente por el número real)

$$\alpha \cdot p(x) = (\alpha \cdot a_n)x^n + (\alpha \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha \cdot a_1)x + (\alpha \cdot a_0)$$

☆ *¿Cuál es el polinomio nulo?*

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0$$

-EJEMPLO 4.- ***Conjunto de las matrices reales de*** **m** ***filas y*** **n** ***columnas.***

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

☆ ***¿Cómo se suman dos matrices?***

elemento a elemento

☆ ***¿Cómo se multiplica una matriz por un número real?***

se multiplica cada elemento de la matriz por el número real

-EJEMPLO 5.- Conjunto de las funciones reales de variable real con dominio $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{f} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

☆ ***¿Cómo se suman dos funciones?***

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}: \quad (\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$$

☆ ***¿Cómo se multiplica una función por un número real?***

$$\alpha\cdot\mathbf{f}: \quad (\alpha\cdot\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \alpha\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$$

☆ ***¿Cuál es la función nula?***

$$\mathbf{0}: \quad \mathbf{f} \;/\; \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$$

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

$\mathbb{R}^n$ $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	*suma:* $\overline{x}+\overline{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ *producto por un escalar:* $\alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$ *vector nulo:* $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ *vector opuesto:* $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$
$\mathcal{P}_n$ $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	*suma:* $p(x)+q(x) = (a_n+b_n)x^n + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$ *producto por un escalar:* $\alpha \cdot p(x) = (\alpha \cdot a_n)x^n + \cdots + (\alpha \cdot a_1)x + (\alpha \cdot a_0)$ *vector nulo:* $0 = 0 \cdot x^n + \cdots + 0 \cdot x + 0$ *vector opuesto:* $-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	*suma:* $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$ *producto por un escalar:* $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$ *vector nulo:* $(0)_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *vector opuesto:* $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$
$\mathcal{C}_{[a,b]}$ $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$	*suma:* $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ *producto por un escalar:* $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ *vector nulo:* $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ *vector opuesto:* $(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Propiedades.- *Sea V un e. v. real:*

1.- $\alpha \cdot (\overline{x} - \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} - \alpha \cdot \overline{y}$

$\overline{x} +$ "opuesto" de $\overline{y}$

2.- $(\alpha - \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} - \beta \cdot \overline{x}$

3.- $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Al multiplicar cualquier escalar por el vector nulo obtenemos el vector nulo.

4.- $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$

Al multiplicar cualquier vector por el escalar 0 obtenemos el vector nulo.

5.- $\alpha \cdot (-\overline{x}) = -(\alpha \cdot \overline{x}) = (-\alpha) \cdot \overline{x}$

6.- $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0} \implies \alpha = 0 \vee \overline{x} = \overline{0}$

Esta propiedad no es tan obvia como puede parecer.

7.- $\alpha \cdot \overline{x} = \beta \cdot \overline{x} \implies \alpha = \beta$

$\overline{x} \neq \overline{0}$

8.- $\alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{y} \implies \overline{x} = \overline{y}$

$\alpha \neq 0$

COMBINACIONES LINEALES

Sea V *un espacio vectorial real:*

COMBINACIÓN LINEAL.-

$\overline{x} \in V$ *es **combinación lineal** de* $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \in V$

cuando $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{u}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overline{u}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{u}_i$$

COMENTARIOS.-

Dados los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \in V$ *y los escalares* α_1 *,* α_2 *,...,* α_n *(números reales), el vector* $\overline{x} \in V$ *definido por:*

$$\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{u}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overline{u}_n$$

*se llama **combinación lineal** de los vectores :* $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$

Algunas combinaciones lineales de los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ *son, por ejemplo:*

$$\overline{u}_1 = 1 \cdot \overline{u}_1 + 0 \cdot \overline{u}_2$$

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{u}_1 + 0 \cdot \overline{u}_2$$

$$2\overline{u}_1 - 3\overline{u}_2$$

El vector **(2,1,1)** *de* $\mathbb{R}^3$ *no es combinación lineal de los vectores* **(1,0,0)** *y* **(1,1,0)** *de* $\mathbb{R}^3$.

El polinomio x^2+1 *de* $\mathcal{P}_3$ *no es combinación lineal de los polinomios* x^3+x-1 *,* $x+2$ *y* 1 *de* $\mathcal{P}_3$ *.*

Para comprobar si un vector $\overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *es combinación lineal de* m *vectores de* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *se plantea la ecuación vectorial siguiente:*

$$\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \overline{\mathbf{u}}_m$$

Utilizando las definiciones de las operaciones suma de vectores de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *y producto de un vector de* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *por un escalar realizamos la operación:*

$$\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \overline{\mathbf{u}}_m$$

Teniendo en cuenta que dos vectores de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *son iguales si* ***todas*** *sus componentes son iguales dos a dos, tenemos el siguiente sistema de* n *ecuaciones lineales con* m *incógnitas* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *:*

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_{11} + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_{12} + \cdots + \alpha_m \cdot \mathbf{u}_{1m} \\ \mathbf{x}_2 = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_{21} + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_{22} + \cdots + \alpha_m \cdot \mathbf{u}_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{x}_n = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} + \cdots + \alpha_m \cdot \mathbf{u}_{nm} \end{array}\right\}$$

Si el sistema es compatible determinado, entonces $\overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ***es combinación lineal de los vectores*** $\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_m \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

Si el sistema es incompatible, entonces $\overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ***NO*** ***es combinación lineal de los vectores*** $\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_m \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

El sistema nunca puede ser compatible indeterminado.

En el espacio vectorial real $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$ ***de los polinomios reales de grado menor o igual que*** n ***se procede del mismo modo que en el espacio vectorial real*** $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$***. Tenemos que tener en cuenta que dos polinomios de grado menor o igual que*** n ***son iguales si coinciden todos y cada uno de sus coeficientes, incluido el término independiente. De este modo tendremos un sistema de*** n+1 ***(ATENCIÓN!!!) ecuaciones lineales con*** m ***incógnitas.***

A continuación resolvemos un par de ejercicios en los que trabajamos con el concepto de combinación lineal de vectores en los espacios vectoriales introducidos en los ejemplos 2 y 3 de este capítulo: $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$ ***y*** $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

Destacar que es necesario conocer las definiciones de suma de vectores (o polinomios) y producto de un vector (o polinomio) por un escalar. Además tenemos que tener claro qué significa que dos vectores de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ***sean iguales (o que dos polinomios de*** $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$ ***sean iguales).***

SUGERENCIA.- ***Utilizar las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conocidas (método de Gauss), que explicaremos con detalle en el Tema 5 de este curso.***

SUBESPACIOS VECTORIALES

Algunos subconjuntos de un espacio vectorial **V** *son a su vez espacios vectoriales con las operaciones definidas en* **V.**

Estos subconjuntos se denominan subespacios vectoriales.

SUBESPACIO VECTORIAL.-

$\emptyset \neq \mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ *es un subespacio vectorial de* **V**, *si es espacio vectorial con las operaciones definidas en* **V.**

- *Subespacios vectoriales impropios* $\{\overline{0}\}$, **V**
- *Subespacios vectoriales propios: cualquier subespacio vectorial de* **V** *distinto de* $\{\overline{0}\}$ *y* **V.**

Antes de dar ejemplos de subespacios vectoriales, es conveniente dar dos resultados que hacen relativamente sencillo determinar si un subconjunto **S** *de* **V** *es subespacio vectorial de* **V.**

Para demostrar que $\emptyset \neq \mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ *es subespacio vectorial de* **V**, *NO ES NECESARIO comprobar los 8 axiomas de la definición de espacio vectorial.*

- ***Un subconjunto* S *no vacío de* V *es s.v. de* V *si y sólo si cumple:***

$$\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}: \quad \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}: \quad \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$$

- ***Un subconjunto* S *no vacío de* V *es s.v. de* V *si y sólo si cumple:***

$$\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \beta \cdot \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}$$

Para demostrar que $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ *es subespacio vectorial de* **V**, *basta con comprobar que es un subconjunto no vacío (pues todo espacio vectorial ha de contener al menos el vector nulo, luego es conveniente comprobar que el vector nulo es un vector de* **S**) *y que* **S** *es cerrado bajo las operaciones suma de vectores y producto por un escalar. El resto de las propiedades son "heredadas" por* **S.** *Esto es lo que significan las dos caracterizaciones de subespacio vectorial que acabamos de enunciar.*

En la práctica, para demostrar que S NO es s. v. de V

- $\overline{0} \notin \mathbf{S}$

o

- $\exists \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{S} / \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \notin \mathbf{S}$

o

- $\exists \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}, \exists \alpha \in \mathbb{R} / \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \notin \mathbf{S}$

Basta con comprobar una de estas tres cosas

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de conjuntos con dos operaciones (suma y producto por un escalar) que no tienen estructura de espacio vectorial. Para demostrar que un conjunto no es espacio vectorial es suficiente comprobar que no satisface alguno de los ocho axiomas de la definición, pero ***basta con comprobar una de las tres condiciones*** arriba mencionadas.

-EJEMPLO 1.- El conjunto de los números enteros no tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar real.

El conjunto de todos los números enteros con las operaciones normales de suma y producto por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial, ya que el producto no es una operación cerrada.

$$\underbrace{0.5}_{escalar}\cdot\underbrace{1}_{entero} = \underbrace{0.5}_{no\ entero}$$

-EJEMPLO 2.- El conjunto de los polinomios de grado exactamente 2 no tiene estructura de espacio vectorial.

El conjunto de los polinomios de grado exactamente 2 no tiene estructura de espacio vectorial, ya que la suma no es una operación cerrada.

$\mathbf{p(x) = x^2}$

son polinomios de grado 2, pero su suma es un polinomio de primer grado

$\mathbf{q(x) = -x^2+x+1}$

$\mathbf{p(x) + q(x) = x+1}$

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES.-

Si* S , T *son subespacios vectoriales de* V*, entonces:

1. **S $\cap$ T *es subespacio vectorial de* V.**
2. **S $\cap$ T *es el mayor de todos los subespacios vectoriales de* V *incluidos en* S *y* T.**

***La unión de subespacios vectoriales de* V**
***no es necesariamente un subespacio vectorial de* V.**

***En el siguiente apartado veremos una manera de encontrar y construir subespacios de un espacio vectorial* V*. Este método nos será de gran utilidad para demostrar, sin emplear las caracterizaciones de subespacio vectorial del apartado anterior, que un subconjunto no vacío de un espacio vectorial* V *es un subespacio vectorial de* V.**

SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR UNA PARTE FINITA DE UN E. V.

Sea* V *un espacio vectorial real.

Sea* G *un conjunto (no vacío) de vectores de* V*:

$$\emptyset \neq \mathbf{G} = \{\overline{\mathbf{u}}_1, \overline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbf{V}$$

Definimos* $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ *como el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los vectores:

$$\overline{\mathbf{u}}_1, \overline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{u}}_n$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \{\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overline{\mathbf{u}}_n \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}}$$

-Ejemplos.-

- $\mathbf{G} = \{\overline{\mathbf{u}}_1 = (1,0,0)\,,\ \overline{\mathbf{u}}_2 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \{\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 = (\alpha_1, 0, \alpha_2) \,/\, \alpha_1\,,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\mathbf{x}_1, 0, \mathbf{x}_3) \,/\, \mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}\}$

- $\mathbf{G} = \left\{\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,,\ \mathbf{p}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 1\right\} \subset \mathcal{P}_2$

Construir $\mathcal{L}(\mathbf{G})$.

¿El polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} - 2$ **pertenece a** $\mathcal{L}(\mathbf{G})$**?**

¿El polinomio $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} - 2$ **pertenece a** $\mathcal{L}(\mathbf{G})$**?**

SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR UNA COLECCIÓN FINITA DE VECTORES DE V.-

- $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ **es subespacio vectorial de V**

  $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ **: s. v. engendrado por G**

- **G : sistema de generadores de** $\mathcal{L}(\mathbf{G})$

En un mismo subespacio vectorial es posible encontrar distintos sistemas de generadores

- $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ **es el más pequeño de todos los s.v. de V que contienen a G**

¿Cómo encontrar distintos sistemas de generadores de un subespacio vectorial?

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\left\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\bar{u}_i\right\}\right)=\mathcal{L}\left(\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}\right)}$$

¿Cómo demostrar que S es s.v. de V?

$$\boxed{S=\mathcal{L}(G)}$$

-EJEMPLO- ***Demostrar que***

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\,/\,x_3=x_1+2x_2\}\subset\mathbb{R}^3 \text{ es s.v. de } \mathbb{R}^3$$

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\,/\,x_3=x_1+2x_2\}=$$

$$=\{(x_1,x_2,x_1+2x_2)\,/\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{x_1\cdot(1,0,1)+x_2\cdot(0,1,2)\,/\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\mathcal{L}\left(\{\bar{u}_1=(1,0,1)\,,\,\bar{u}_2=(0,1,2)\}\right)\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \ S \text{ s.v. de } \mathbb{R}^3\\ \bullet\ \ G=\{\bar{u}_1\,,\,\bar{u}_2\} \text{ s.g. de } S\end{array}\right.$$

Algoritmo para hallar una base del subespacio vectorial engendrado por una familia G de vectores

Sea $\mathbf{G} = \{\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_r\} \subset \mathbb{R}^n$. *Para hallar una base del subespacio vectorial* $\mathbf{S} = \mathcal{L}(\mathbf{G})$ *podemos proceder del modo siguiente:*

1.- *Formar la matriz* A *de* r *filas y* n *columnas con los vectores de* G *como filas.*

2.- *Realizar operaciones elementales de fila hasta llegar a una matriz* B *escalonada y equivalente a la matriz* A.

3.- *Las filas no nulas de* B *constituyen una base del subespacio engendrado por* G.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

En el estudio del Álgebra Lineal, una de las ideas centrales es la de dependencia o independencia lineal entre vectores.

Podemos plantearnos la siguiente pregunta. ¿Existe una relación especial entre los vectores $\overline{\mathrm{v}}_1 = (1, 2)$ *y* $\overline{\mathrm{v}}_2 = (2, 4)$*?*

$\overline{\mathrm{v}}_2 = 2 \cdot \overline{\mathrm{v}}_1$ *, o escrito de otro modo:*

$$2 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{0}$$

Es decir, el vector nulo se puede escribir como una combinación no trivial de $\overline{\mathrm{v}}_1$ *y* $\overline{\mathrm{v}}_2$. *En este caso se dice que los vectores son* ***linealmente dependientes***. *En general, se tienen las siguientes definiciones:*

SISTEMA LIBRE. SISTEMA LIGADO.-

- $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ *un sistema libre (o son vectores linealmente independientes) si:*

$$\lambda_1 \cdot \bar{u}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \bar{u}_n = \bar{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ *un sistema ligado (o son vectores linealmente dependientes) si:*

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ no todos nulos } / \ \lambda_1 \cdot \bar{u}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \bar{u}_n = \bar{0}$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de los sistemas libres y ligados que nos pueden resultar útiles más adelante.

PROPIEDADES.-

- $\mathbf{F} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ sistema ligado $\iff$

  $\iff \exists\, \bar{u}_i \in \mathbf{F}$ c.l. de los restantes vectores de $\mathbf{F}$

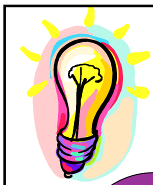
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{G} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\} \text{ libre} \\ \mathbf{F} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, \bar{v}\} \text{ ligado} \end{array}\right\} \implies$

  $\implies \bar{v}$ c.l. de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$

- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{F} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\} \text{ s.g. de } \mathbf{V} \\ \mathbf{G} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m\} \text{ libre} \end{array}\right\} \implies m \leq n$

Las propiedades siguientes son resultados que se demuestran de forma inmediata a partir de los conceptos de sistema libre de vectores y sistema ligado de vectores.

1. *Todos los vectores de un sistema libre son no nulos.*
2. *Si un sistema de vectores contiene al vector nulo, entonces es un sistema ligado.*
3. $\{\overline{\mathrm{x}}\}$ *sistema libre sii* $\overline{\mathrm{x}} \neq \overline{0}$
4. *Un sistema de dos vectores es un sistema ligado si y sólo si uno de los vectores es "múltiplo" del otro.*
5. *Si a un sistema ligado se le añaden nuevos vectores, resulta otro sistema ligado.*
6. *Todo subconjunto de un sistema libre es un sistema libre.*



PRUEBAS PARA LA DEPENDENCIA LINEAL

La consecuencia 3.- nos permite decir cuando un conjunto formado por un único vector de un espacio vectorial V *es un sistema libre y cuando es un sistema ligado.*

Del mismo modo, la consecuencia 4.- es una condición necesaria y suficiente para que una familia formada por dos vectores de un espacio vectorial V *sea linealmente dependiente.*

Cuando disponemos de una colección de más de dos vectores tendremos que recurrir necesariamente, en principio, a la definición para demostrar que se trata de un sistema libre o un sistema ligado.

Para comprobar si una familia de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente vamos a utilizar, en muchos casos, el concepto de rango de una matriz.

Hablaremos de rango de una matriz en un tema posterior, pero como es un concepto que muchos alumnos ya conocen, conviene decir que, en general, resulta más cómodo y más sencillo estudiar la dependencia o independencia lineal de una familia de vectores utilizando el concepto de rango de una matriz.

A partir del momento en el que definimos el concepto de rango de una matriz resolveremos ejercicios de sistemas libres y ligados utilizando la idea del rango de una matriz.

BASES Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

En este apartado presentaremos el concepto fundamental de una base de un espacio vectorial. Como veremos, una base es un conjunto generador "eficiente" que no contiene vectores innecesarios. De hecho, se puede construir una base a partir de un conjunto generador desechando algunos vectores innecesarios. Además, conocer una base de un espacio vectorial es muy útil para comprender el espacio y sus propiedades.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL.-

$\mathrm{B} = \{\bar{\mathrm{u}}_1, \bar{\mathrm{u}}_2, \ldots, \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{n}\}$ ***es una base del e.v. real* V *si:***

- **B** ***s. libre***
- **B** ***s. generador de*** **V**

-EJEMPLOS DE BASES.-

-EJEMPLO 1.- $\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} B_C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n \\ \bar{e}_i = (0, \ldots, \underset{i)}{1}, \ldots, 0) \end{array}\right\} \textit{ base canónica}$$

-EJEMPLO 2.- $\mathcal{P}_n$

$$\left.\begin{array}{l} B_C = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathcal{P}_n \\ B_C = \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\} \subset \mathcal{P}_n \end{array}\right\} \textit{ base canónica}$$

EXISTENCIA DE BASES.-

Todo e.v. **V** *engendrado por un sistema de generadores finito tiene al menos una base.*

Todas las bases del e.v. **V** *poseen el mismo número de elementos. Entonces:*

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.-

El número de elementos que posee una base cualquiera de un e.v. V , recibe el nombre de ***dimensión del e.v.*** **V** **(dim V)**.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$$

Esta información resulta muy útil como se verá posteriormente

-CONSECUENCIAS.-

Si V *es un e.v. con* **dim V = n**, *entonces:*

1.– $\mathbf{F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}}$ **s. libre** $\Longrightarrow$ $\mathbf{m \le n}$

En un espacio vectorial de dimensión n *no puede haber más de* n *vectores linealmente independientes*

2.– $\mathbf{F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}}$ **y** $\mathbf{m > n}$ $\Longrightarrow$ **F s. ligado**

3.– **Si** $\mathbf{F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}}$ **entonces:**

F s. libre $\Longleftrightarrow$ **F s. generador de F**

n vectores l.i. de un e.v. V *de dimensión* n *constituyen una base de* V

Un s.g. de n *vectores de un e.v.* V *de dimensión* n *constituye una base de* V

Dos perspectivas de una base

Cuando se usa el teorema de la reducción de un conjunto generador, la eliminación de vectores de un conjunto generador debe terminar cuando el conjunto generador resulta linealmente independiente. Si se elimina otro vector, no será combinación lineal de los vectores restantes y por lo tanto el conjunto resultante ya no generará el mismo espacio vectorial V.
Una base también es un conjunto linealmente independiente que es lo más grande posible. Si B es una base de V y si B se agranda con un vector, digamos $\bar{v}$, de V, entonces el nuevo conjunto ya no puede ser linealmente independiente, porque B genera V y $\bar{v}$ es por lo tanto una combinación lineal de los vectores de B.

Ejemplo.- ***Los siguientes tres conjuntos de $\mathbb{R}^3$ muestran cómo un conjunto linealmente independiente de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ puede agrandarse para formar una base de $\mathbb{R}^3$ y cómo un agrandamiento adicional destruye la independencia lineal del conjunto. Este mismo ejemplo lo podemos ver desde otra perspectiva: Un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$ formado por 4 vectores puede encogerse para dar una base, pero una contracción adicional destruye la propiedad de ser generador.***

$$\underbrace{\{(1,0,0),(2,3,0)\}}_{\text{Linealmente independiente pero no genera } \mathbb{R}^3} \qquad \underbrace{\{(1,0,0),(2,3,0),(4,5,6)\}}_{\text{Una base de } \mathbb{R}^3} \qquad \underbrace{\{(1,0,0),(2,3,0),(4,5,6),(7,8,9)\}}_{\text{Genera } \mathbb{R}^3 \text{ pero es linealmente dependiente}}$$

Cuando se conoce la dimensión de un espacio o subespacio vectorial, la búsqueda de una base se simplifica con el resultado que damos a continuación, que dice que si un conjunto tiene el número correcto de elementos, entonces basta con demostrar que el conjunto es linealmente independiente o bien que genera el espacio. El teorema es de importancia crítica en numerosos problemas de aplicaciones (que tienen que ver con ecuaciones diferenciales o en diferencias, por ejemplo) donde la independencia lineal es mucho más fácil de comprobar que la propiedad de generar.

*Según la consecuencia 3.-, **conocida la dimensión de un e.v.** $\mathbf{V}$ ($\dim \mathbb{R}^{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$, $\dim \mathcal{P}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}+\mathbf{1}$), **¿cómo encontrar una base B de V?:***

- nro. de vectores de $= \dim \mathbf{V}$
- B s. libre (o B s. generador de V)

COORDENADAS DE UN VECTOR

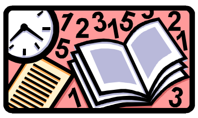
Sea V e.v. real con $\mathbf{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ base de V.

⋆ $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{V} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mathbf{n} \in \mathbb{R}$ únicos tales que:

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + \alpha_\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{n} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \alpha_\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

⋆ *A los escalares (únicos) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mathbf{n} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ se les llama coordenadas del vector $\bar{\mathbf{x}}$ en la base* **B.**

Hallar las coordenadas del vector
$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2}) \in \mathbb{R}^3$



- ***en la base canónica de*** $\mathbb{R}^3$
- ***en la base*** $\mathbf{B}^* = \{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})\}$ $\mathbb{R}^3$

DIMENSIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea S s.v. de V y $\mathbf{B} = \{\bar{\mathrm{u}}_1, \bar{\mathrm{u}}_2, \ldots, \bar{\mathrm{u}}_r\} \subset \mathbf{S}$

★ B *base de* S *si* $\begin{cases} 1.- \ \mathrm{B} \ \text{s.libre} \\ 2.- \ \mathrm{B} \ \text{s. generador de S} \end{cases}$

★ $\dim \mathrm{S}$ **: *número de elementos de una base de* S**

Si dim V = n, y S es un s.v. de V, entonces:

- $\dim \mathbf{S} \leq \mathbf{n}$
- $\dim \mathbf{S} = \mathbf{n} \iff \mathbf{S} = \mathbf{V}$

¿Cómo encontrar una base B de un subespacio vectorial S?

$1.-$ $\mathrm{S} = \mathcal{L}(\mathrm{G}) \implies$ **B = G *es s.g. de* S**

$2.-$ ***Hay que demostrar que* B = G *es s. libre***

¿Cómo encontrar una base B de un espacio vectorial V?

- ***Para encontrar una base de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, basta con hallar n vectores l.i. de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, pues***

$$\dim \mathbb{R}^{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$$

- ***Para hallar una base de $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$, basta con hallar n + 1 polinomios l.i. de $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$, pues***

$$\dim \mathcal{P}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \mathbf{1}$$

RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

Sea V espacio vectorial real y F una colección de vectores de V.

*Se llama **rango** de F (r (F)) al **número máximo de vectores linealmente independientes de** F.*

Volveremos a estudiar el concepto de rango de una familia de vectores dentro del marco de la teoría de matrices. Esto nos permitirá desarrollar métodos más eficientes para calcular el rango de una familia de vectores y también para hallar una base de un subespacio vectorial generado por una familia de vectores.

Si F es un subconjunto del e.v. V que consta de m vectores y dim V = n

$\bar{0} \neq \bar{x} \in F$

- $1 \leq r(F) \leq \min\{m, n\}$
- $r(F) = \dim \mathcal{L}(F)$