Tema 6.- ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

- ***PRODUCTO ESCALAR, NORMA Y DISTANCIA. MATRIZ DE GRAM***
- ***ORTOGONALIDAD***
- ***PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT***
- ***APROXIMACIÓN LINEAL EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS***
- ***SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES*** **(MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS)**

Una de las aplicaciones más interesantes en este capítulo es el método de* mínimos cuadrados*. Con frecuencia, al tratar de comprender datos experimentales, deseamos determinar una recta o una curva que "encaje" o "se ajuste" más (o describa mejor) estos datos. Por ejemplo, imaginemos que un profesor de álgebra lineal mantiene las estadísticas (que se muestran a continuación) del porcentaje de notables otorgados durante un período de 6 cursos.

Curso	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de notables	0.20	0.25	0.20	0.30	0.45	0.40

Si el profesor quisiera trazar una recta que se acerque a los puntos en la tabla tendrá muchas opciones. Sin embargo, hay una que se ajusta mejor a estos datos, bajo cierto criterio. En este capítulo veremos que esa recta es **y = 0.13333 + 0.05 x**

Un poco de historia

El método por mínimos cuadrados fue inventado por **Karl Friedrich Gauss**, y lo usó para resolver un problema de astronomía. En 1801 el asteroide *Ceres* se había observado mucho más brillante durante más de un mes antes de desaparecer cuando se acercó al Sol. Con base en las observaciones disponibles, los astrónomos deseaban aproximar la órbita de *Ceres* para observarlo de nuevo cuando se alejara del sol. Gauss empleó los mínimos cuadrados e impactó a la comunidad científica al predecir la hora y el lugar correctos (unos 10 meses después) para localizar el asteroide.

Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) Matemático, físico y astrónomo alemán. Nacido en el seno de una familia humilde, desde muy temprana edad Gauss dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas (según la leyenda, a los tres años interrumpió a su padre cuando estaba ocupado en la contabilidad de su negocio para indicarle un error de cálculo). Durante su vida, se reconoció que era el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX.

PRODUCTO ESCALAR

Sea $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial real*

$$\langle \quad , \quad \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*es un **producto escalar** sobre* $\mathbf{V}$ *si :*

1.- $\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle \qquad \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$

2.- $\langle \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \rangle \qquad \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}$

3.- $\langle \lambda \cdot \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle = \lambda \cdot \langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle \qquad \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V} \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4.- $\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle > \mathbf{0} \qquad \forall \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$

$(\mathbf{V}, \langle \quad , \quad \rangle)$ *es un **espacio vectorial euclídeo***

-EJEMPLOS.-

1.- Producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$

Para $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ *vectores de* $\mathbb{R}^2$ *definimos:*

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

✶ $\left.\begin{array}{l} \overline{x} = (2,1) \\ \overline{y} = (0,3) \end{array}\right\}$ $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 0 + 3 = 3$

2.- Otro producto escalar en $\mathbb{R}^2$

Para $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ *vectores de* $\mathbb{R}^2$ *definimos:*

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

✶ $\left.\begin{array}{l} \overline{x} = (2,1) \\ \overline{y} = (0,3) \end{array}\right\}$ $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 2 \cdot 0 + (2+1) \cdot (0+3) = 0 + 9 = 9$

3.- Producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Siendo $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

4.- Producto escalar usual en $\mathcal{P}_n$

Para $\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{array}$ *definimos:*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} + \cdots + a_1 b_1 + a_0 b_0$$

✶ En $\mathcal{P}_2$ $p(x) = 2x^2 + 3$, $q(x) = 4x^2 - x + 4$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 20$$

5.- Producto escalar usual en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Para $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *definimos:*

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}\ (B^T \cdot A)$$

*Siendo la **traza** de una matriz cuadrada la suma de los elementos de su diagonal principal.*

✶ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\langle A, B \rangle = \text{traza}\ (B^T \cdot A) =$

$$= \text{traza}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$$

-OBSERVACIÓN.- *Otra forma (más cómoda) de calcular el producto escalar usual de dos matrices cuadradas del mismo orden*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{traza}\left(B^T \cdot A\right) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{1n} + \\ &+ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{2n} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{n1}b_{n1} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{aligned}$$

✶ $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}\left(B^T \cdot A\right) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 3$$

6.- Producto escalar usual en $\mathcal{C}_{[a,b]}$

$\mathcal{C}_{[a,b]}$ es el espacio vectorial de las funciones continuas en $[a\ ,\ b]$*, y por tanto integrables en* $[a\ ,\ b]$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

✶ En $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ $\quad f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = 2x + 1$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2(2x+1)dx = \int_{-1}^{1} \left(2x^3 + x^2\right) dx =$$

$$= \left.\frac{2x^4}{4}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \cdots = \frac{2}{3}$$

Algunas propiedades del producto escalar.-

1.- $\langle \bar{x}, \bar{y} + \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$

2.- $\langle \bar{x}, \lambda \cdot \bar{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

3.- $\langle \bar{x}, \bar{0} \rangle = 0$

El único vector de un espacio vectorial euclídeo V que cumple que su producto escalar con todos los vectores de V es cero, es el vector nulo.

NORMA Y DISTANCIA EUCLÍDEAS

Los conceptos geométricos de longitud, distancia y perpendicularidad, que son bien conocidos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se definen en este capítulo para $\mathbb{R}^n$ y, en general, para cualquier espacio vectorial euclídeo V. Estos conceptos nos van a proporcionar herramientas geométricas potentes para resolver muchos problemas aplicados, incluidos los problemas de mínimos cuadrados que hemos mencionado en la introducción. Los tres conceptos se definen en términos del producto escalar, también denominado producto interior, de dos vectores.

Sea $(\mathbf{V}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo*

✶ ***Norma o longitud de un vector.-*** $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$

$$\|\overline{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle} \in \mathbb{R}^+$$

✶ ***Distancia entre dos vectores.-*** $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$

$$\mathrm{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|$$

-OBSERVACIÓN.- $\|\overline{\mathbf{x}}\| = \mathrm{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{0}})$

Propiedades de la norma.-

1.- $\|\overline{\mathbf{x}}\| \geq 0$

2.- $\|\overline{\mathbf{x}}\| = 0 \iff \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$

3.- $\|\lambda \cdot \overline{\mathbf{x}}\| = |\lambda| \cdot \|\overline{\mathbf{x}}\|$

4.- $|\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle| \leq \|\overline{\mathbf{x}}\| \cdot \|\overline{\mathbf{y}}\|$

*Desigualdad de Schwarz**

5.- $|\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle| = \|\overline{\mathbf{x}}\| \cdot \|\overline{\mathbf{y}}\| \iff \{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}$ sistema ligado

6.- $\|\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}\| \leq \|\overline{\mathbf{x}}\| + \|\overline{\mathbf{y}}\|$

Desigualdad de Minkowski o desigualdad triangular

* Sobre la historia de la desigualdad Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky

Se acredita a Cauchy[1] la desigualdad para vectores y a Schwarz[2] para los productos escalares con integrales. Sin embargo, fue Bunyakovsky[3] quien demostró y publicó la desigualdad de Schwarz en una monografía, 25 años antes que Schwarz.

[1] *Augustin Louis Cauchy (1789-1857) nació en París y murió en una villa cercana a esa misma ciudad. Es autor de trabajos importantes sobre ecuaciones diferenciales, series infinitas, determinantes, probabilidad, grupos de permutación y de física matemática. En 1814 publicó una memoria que se convirtió en el fundamento de la teoría de las funciones complejas. Su trabajo se conoce por su rigor. Publicó 789 artículos y ocupó puestos en a Facultad de Ciencias, en el Colegio de Francia y en la Escuela Politécnica, todos en París. Ha muchos términos y teoremas que llevan su apellido. Fue un realista fiel y vivió en Suiza, Turín y Praga, después de rehusarse a jurar la alianza. Regresó a París en 1838 y recuperó su puesto en la Academia de Ciencias. En 1848 recuperó su lugar en la Sorbona, que mantuvo hasta su muerte.*

[2] *Karl Herman Amandus Schwarz (1843-1921) nació en Hermsdorf, Polonia (hoy Alemania), y murió en Berlín. Estudió química en Berlín, pero se cambió a matemáticas, obteniendo el doctorado. Desempeñó puestos académicos en Halle, Zurich y Göttingen. Reemplazó a Weierstrass en Berlín y enseñó alllí hasta 1917. Trabajó en cálculo de variaciones y en superficies mínimas. Su memoria en ocasión del 70 aniversario de Weierstrass contiene, entre otros temas importantes, la desigualdad para integrales que hoy se conoce como desigualdad de Schwarz.*

[3] *Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889) nació en Bar, Ucrania, y murió en San Petersburgo, Rusia. Fue profesor en San Petersburgo de 1846 a 1880. Publicó más de 150 trabajos en matemáticas y mecánica. Fue autor de trabajos importantes en teoría de los números, y demostró y publicó la desigualdad de Schwarz en 1859, 25 años antes que Schwarz. También trabajó en geometría y en hidrostática.*

$$|\langle \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \rangle| \leq \|\bar{\mathbf{x}}\| \cdot \|\bar{\mathbf{y}}\|$$

Desigualdad de Schwarz

$$\forall\, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \neq \bar{\mathbf{0}} \ : \quad -1 \leq \frac{\langle \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \rangle}{\|\bar{\mathbf{x}}\| \cdot \|\bar{\mathbf{y}}\|} \leq 1$$

Definición de ángulo entre dos vectores no nulos.-

Es el correspondiente al arco $\theta \in [0, \pi]$ *dado por:*

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \rangle}{\|\bar{\mathbf{x}}\| \cdot \|\bar{\mathbf{y}}\|}$$

EXPRESIÓN MATRICIAL DEL PRODUCTO ESCALAR

Si V *es un espacio vectorial euclídeo de dimensión* n *y*

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$$

es una base de V, *entonces:*

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_n \rangle \\ \langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \bar{e}_n, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_n, \bar{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{e}_n, \bar{e}_n \rangle \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Gram } G} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} =$$

coordenadas de $\bar{x}$
en la base B

coordenadas de $\bar{y}$
en la base B

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n$$

$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \cdots + y_n\bar{e}_n$$

$$= X^T \cdot G \cdot Y \in \mathbb{R}$$

- $G = (\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle)_{n \times n}$: *matriz de Gram, o matriz del producto escalar dado, en la base* B.

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$$

  - ✶ G *es simétrica.*
  - ✶ *Los elementos de la diagonal principal de* G *son estrictamente positivos.*
  - ✶ G *es regular.*

- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = X^T \cdot G \cdot Y$: *expresión matricial del producto escalar dado en la base* B.

ORTOGONALIDAD

✶ **Definición de vectores ortogonales.-**

$$\overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \iff \langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle = 0$$

-EJEMPLOS.- *En* ($\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle$ *p.e.usual*) *comprobar que los vectores* $\overline{\mathrm{x}} = (-1, 2)$, $\overline{\mathrm{y}} = (2, 1)$*ogonales.*
¿Son ortogonales estos vectores con el producto escalar

$$\langle \overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}} \rangle = \mathrm{x}_1\mathrm{y}_1 + (\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)\,?$$

✶ $\overline{0}$ *es el único vector de* $\mathbf{V}$ *ortogonal a todos los vectores de* $\mathbf{V}$

✶ $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \neq \overline{\mathbf{0}}$: $\quad \overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \iff \theta = \pi/2$

IMPORTANTE

✶ **Definición de subconjuntos ortogonales.-**

Dos ***subconjuntos*** A *y* B *de* V *son ortogonales* ($\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$), *cuando* $\overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \quad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{A} \wedge \forall \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{B}$

✶ *Sea* S ***subespacio vectorial*** *de* V *y* $\mathrm{B} = \{\overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{e}}_\mathrm{r}\}$ *una base de* S. *Entonces:*

$$\{\overline{\mathrm{x}}\} \perp \mathrm{S} \iff \{\overline{\mathrm{x}}\} \perp \mathrm{B}$$

-EJEMPLO.- *Comprobar que los subconjuntos*

$$\mathrm{A} = \{\overline{\mathrm{u}}_1 = (1, 1, 0), \overline{\mathrm{u}}_2 = (2, 2, 0)\}$$
$$\mathrm{B} = \{\overline{\mathrm{v}}_1 = (0, 0, 2), \overline{\mathrm{v}}_2 = (-1, 1, 0)\}$$

son ortogonales en ($\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle$ *.e. usual*)

-EJEMPLO.- *Hallar el subespacio vectorial $S^{\perp}$ formado por todos los vectores ortogonales al subespacio:*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 - x_2 = x_3 = 0\}$$

utilizando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$.

Según la definición de $S^{\perp}$, será:

$$S^{\perp} = \{\overline{x}/\overline{x} \perp S\} = \{\overline{x}/\overline{x} \perp B\}$$

siendo B una base de S.

✶ *Primero encontramos una base de S.*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 - x_2 = x_3 = 0\} = \{(x_1, x_1, 0)/x_1 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x_1(1,1,0)/x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{\overline{u} = (1,1,0)\}) \implies$$
$$\implies \left.\begin{array}{l} B = \{\overline{u} = (1,1,0)\} \text{ s.g. de } S \\ \overline{u} \neq \overline{0} \implies B \text{ s.libre} \end{array}\right\} \implies B = \{\overline{u} = (1,1,0)\} \text{ base de } S$$

✶ $$S^{\perp} = \{\overline{x}/\overline{x} \perp S\} = \{\overline{x}/\overline{x} \perp B\} = \{\overline{x} = (x,y,z)/\overline{x} \perp \overline{u}\} =$$
$$= \{\overline{x} = (x,y,z)/(x,y,z) \perp (1,1,0)\} = \{\overline{x} = (x,y,z)/x + y = 0\} =$$
$$= \{(x,-x,z)/x, z \in \mathbb{R}\} = \cdots = \mathcal{L}(\{\overline{u}_1 = (1,-1,0), \overline{u}_2 = (0,0,1)\}) = S^{\perp}$$

SISTEMAS ORTOGONALES Y ORTONORMALES. PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

*En este apartado describiremos un método muy importante, llamado **proceso de Gram-Schmidt***. El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo sencillo para producir una base ortogonal u ortonormal para cualquier subespacio vectorial, de un espacio vectorial euclídeo.*

✶ $\{\overline{v}_i / i \in I\}$ *es un **sistema ortogonal** de vectores si*

$$\overline{v}_i \perp \overline{v}_j \quad \forall i \neq j$$

✶ $\{\overline{v}_i / i \in I\}$ *es un **sistema ortonormal** de vectores si*

- $\overline{v}_i \perp \overline{v}_j \quad \forall i \neq j$
- $\|\overline{v}_i\| = 1 \quad \forall i \in I$

Vectores unitarios

Es decir, un sistema ortonormal es un sistema ortogonal formado por vectores unitarios

*En honor del matemático y actuario danés **Jörgen Pedersen Gram (1850-1916)** y **Erhard Schmidt**, matemático alemán (1876-1959).*

-EJEMPLOS.-

1.- En ($\mathbb{R}^3, \langle \ , \ \rangle$ *p.e. usual*)

✶ *el sistema* $\{\overline{v}_1 = (1,1,0), \overline{v}_2 = (0,0,2)\}$ *es ortogonal, pues:* $\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle = 0$

pero no es ortonormal pues: $\|\overline{v}_1\| = \sqrt{\langle \overline{v}_1, \overline{v}_1 \rangle} = \sqrt{2} \neq 1$

✶ *el sistema* $\{\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1)\}$ *es ortonormal, pues:*

- $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_3 \rangle = \langle \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle = 0$
- $\|\overline{e}_1\| = \|\overline{e}_2\| = \|\overline{e}_3\| = 1$

2.- En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

¿Son ortogonales los vectores $\{\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1)\}$

IMPORTANTE

Propiedades de los sistemas ortogonales.-

a) $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r\}$ *s.ortogonal de vectores no nulos del e.v. euclídeo* V, *entonces:*

$$\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r\} \quad \text{s.libre}$$

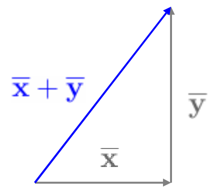
b) $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r\}$ *s.ortogonal, entonces:*

$$\|\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \cdots + \overline{v}_r\|^2 = \|\overline{v}_1\|^2 + \|\overline{v}_2\|^2 + \cdots + \|\overline{v}_r\|^2$$

-OBSERVACIÓN.- *Para r = 2*

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2$$

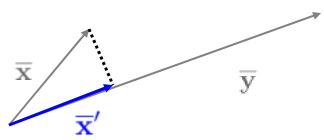
En $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual:*



Teorema de Pitágoras

★ **Proyección ortogonal de un vector.-** *La proyección ortogonal de* $\overline{\mathbf{x}}$ *sobre* $\overline{\mathbf{y}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ *es el vector:*

$$\overline{\mathbf{x}}' = \underbrace{\frac{\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overline{\mathbf{y}}\|^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$$



-OBSERVACIÓN.- $\|\overline{\mathbf{x}}'\| \leq \|\overline{\mathbf{x}}\|$

-EJEMPLO.- *En* $\mathbb{R}^2$ *con el p.e. usual la proyección ortogonal del vector* $\overline{\mathrm{x}} = (1,1)$*bre* $\overline{\mathrm{y}} = (3,0)$

$$\overline{\mathbf{x}}' = \frac{\langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overline{\mathbf{y}}\|^2} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \frac{3}{9} \cdot (3,0) = (1,0) = \overline{\mathbf{x}}'$$

Si $\{\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_r\}$ *es un s. libre de un espacio vectorial euclídeo* V, *entonces:*
$\exists\ \{\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{v}}_r\}$ *s.ortogonal*
y
$\exists\ \{\overline{\mathrm{w}}_1, \overline{\mathrm{w}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{w}}_r\}$ *s.ortonormal*
tales que:

Todo espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n admite bases ortogonales y ortonormales

¿Cómo se hallan estas bases?

$$\mathcal{L}(\{\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_r\}) = \mathcal{L}(\{\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{v}}_r\}) = \mathcal{L}(\{\overline{\mathrm{w}}_1, \overline{\mathrm{w}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{w}}_r\})$$

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:

★ $\overline{\mathrm{v}}_1 = \overline{\mathrm{u}}_1$

★ $\overline{\mathrm{v}}_2 = \overline{\mathrm{u}}_2 - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_2, \overline{\mathrm{v}}_1 \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_1\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_1$

★ $\overline{\mathrm{v}}_3 = \overline{\mathrm{u}}_3 - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_3, \overline{\mathrm{v}}_1 \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_1\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_1 - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_3, \overline{\mathrm{v}}_2 \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_2\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_2$

....

★ $\overline{\mathrm{v}}_r = \overline{\mathrm{u}}_r - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_r, \overline{\mathrm{v}}_1 \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_1\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_1 - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_r, \overline{\mathrm{v}}_2 \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_2\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_2 - \cdots - \dfrac{\langle \overline{\mathrm{u}}_r, \overline{\mathrm{v}}_{r-1} \rangle}{\|\overline{\mathrm{v}}_{r-1}\|^2} \cdot \overline{\mathrm{v}}_{r-1}$

¿Cómo se construye una base ortogonal B_O (ortonormal B_{ON}) de un espacio vectorial euclídeo S?

1.- *Hallar una base* B *de* S: $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r\}$

2.- *Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*:

- $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$
- $\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \dfrac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \cdot \bar{v}_1$
- $\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \dfrac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \cdot \bar{v}_1 - \dfrac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2} \cdot \bar{v}_2$

....

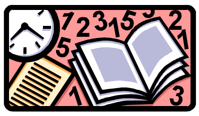
- $\bar{v}_r = \bar{u}_r - \dfrac{\langle \bar{u}_r, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \cdot \bar{v}_1 - \dfrac{\langle \bar{u}_r, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2} \cdot \bar{v}_2 - \cdots - \dfrac{\langle \bar{u}_r, \bar{v}_{r-1} \rangle}{\|\bar{v}_{r-1}\|^2} \cdot \bar{v}_{r-1}$

$$B_O = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\}$$

3.- *Normalizar los vectores* $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\}$ *del paso* **2.-**:

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}, \bar{w}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|}, \ldots, \bar{w}_r = \frac{\bar{v}_r}{\|\bar{v}_r\|} \qquad B_{ON} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r\}$$

-OBSERVACIONES.-



1.- *No es necesario partir de una base* B *de* S, *basta con partir de un sistema generador de* S. *El proceso de Gram-Schmidt detectará si el sistema es libre o ligado.*

2.- *Suele resultar conveniente calcular los productos escalares de los diversos vectores de la base o s.g. de* S *y "reordenarlos" escribiendo en primer lugar aquellos vectores que sean ortogonales entre sí.*

- ***Utilizando el p.e. usual hallar una base ortogonal del s.v. engendrado por los vectores:***

$$\bar{u}_1 = (1,1,0,1)$$
$$\bar{u}_2 = (0,1,1,0)$$
$$\bar{u}_3 = (2,1,-1,2)$$

- ***Utilizando el p.e. usual hallar una base ortogonal del s.v. engendrado por los vectores:***

$$\bar{u}_1 = (1,1,0,1)$$
$$\bar{u}_2 = (0,1,1,0)$$
$$\bar{u}_3 = (0,1,0,-1)$$

APROXIMACIÓN LINEAL EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

En este apartado vamos resolver el siguiente problema:

- ✶ $(\mathbf{V}, \langle\ ,\ \rangle)$ *espacio vectorial euclídeo*
- ✶ $\mathbf{S}$ ***subespacio*** *de* V *con* $\mathrm{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_r\}$ *base de* S
- ✶ $\bar{v} \in \mathbf{V}$

Se trata de encontrar $\bar{v}' \in \mathbf{S}$ *tal que:*

$$d(\bar{v}, \bar{v}') \quad \textit{sea mínima}$$

Este problema admite solución y es única.

$\bar{v}' \in \mathbf{S}$ *se denomina* ***mejor aproximación de*** $\bar{v}$ ***en S.***

-OBSERVACIÓN.- *Si* $\bar{v} \in \mathbf{S}$, *entonces* $\bar{v}' = \bar{v}$

Mejor aproximación de $\bar{v} \in \mathrm{V}$ en S.-

Si $\mathrm{B_O} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\}$ *es una* ***base ortogonal*** *de* S, *la mejor aproximación de* $\bar{v} \in \mathrm{V}$ *en* S *es:*

$$\bar{v}' = \underbrace{\frac{\langle\bar{v}, \bar{v}_1\rangle}{\|\bar{v}_1\|^2}}_{\alpha_1} \cdot \bar{v}_1 + \underbrace{\frac{\langle\bar{v}, \bar{v}_2\rangle}{\|\bar{v}_2\|^2}}_{\alpha_2} \cdot \bar{v}_2 + \cdots + \underbrace{\frac{\langle\bar{v}, \bar{v}_r\rangle}{\|\bar{v}_r\|^2}}_{\alpha_r} \cdot \bar{v}_r$$

Coeficientes de Fourier. Suma de Fourier.-

Si $\mathrm{B_O} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\}$ *es una* ***base ortogonal*** *de* S:

- ✶ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r$ *se denominan* ***coeficientes de Fourier.***
- ✶ $\bar{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle\bar{v}, \bar{v}_i\rangle}{\|\bar{v}_i\|^2} \cdot \bar{v}_i$ *se llama* ***suma de Fourier.***

¿Cómo encontrar la mejor aproximación de un vector de un espacio vectorial V en un subespacio S de V?

1.- *Comprobar que* $\overline{v} \notin S$ $\quad (\text{si } \overline{v} \in S \implies \overline{v}' = \overline{v})$

2.- *Hallar una base* **B** *de* **S:** $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$

3.- *Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a* **B:**

$$B_O = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r\}$$

B_O *base ortogonal de* S

4.- *Suma de Fourier (* $\overline{v}'$ *) de* $\overline{v} \in V$ *respecto de la base ortogonal* B_O *encontrada en el paso* 3.-:

$$\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{v}_i \rangle}{\|\overline{v}_i\|^2} \cdot \overline{v}_i$$

5.- *Comprobar el resultado:*

$$\overline{v}' \in S$$
$$\{\overline{v}' - \overline{v}\} \perp B$$

HAY QUE TRABAJAR CON EL PRODUCTO ESCALAR DEL PROBLEMA

-EJERCICIO.- ***Consideremos el producto escalar usual en*** $\mathbb{R}^4$

a.- ***Encontrar la mejor aproximación*** $\overline{w}$ ***de*** $\overline{v} = (1,1,1,1)$ ***en el subespacio vectorial S y hallar la norma del error cometido.***

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = x_3\}$$

Solución

1.- ***Comprobamos que*** $\overline{v} \notin S$

2.- ***Hallamos una base*** B_S ***de S*** $\quad B_S = \{\overline{u}_1 = (1,1,0,1), \overline{u}_2 = (0,1,1,0)\}$

3.- ***Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a la base*** B_S ***de S para conseguir una base ortogonal*** B_O ***de S:***

- $\overline{v}_1 = \overline{u}_1 = (1,1,0,1) = \overline{v}_1$
- $\overline{v}_2 = \overline{u}_2 - \dfrac{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 = \cdots = (0,1,1,0) - \dfrac{1}{3}(1,1,0,1) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1, -\dfrac{1}{3}\right) = \overline{v}_2$

$$\begin{cases} \langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle = \cdots = 1 \\ \|\overline{v}_1\|^2 = \cdots = 3 \end{cases}$$

$$B_O = \left\{\overline{v}_1 = (1,1,0,1), \overline{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

4.- *Suma de las proyecciones ortogonales de $\overline{v}$ sobre los vectores de la base ortogonal B_O de S:*

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle \overline{v}, \overline{v}_i \rangle}{\|\overline{v}_i\|^2} \cdot \overline{v}_i = \frac{\langle \overline{v}, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 + \frac{\langle \overline{v}, \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 = \cdots = \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \overline{w}$$

$$\langle \overline{v}, \overline{v}_1 \rangle = 3 \qquad \langle \overline{v}, \overline{v}_2 \rangle = 1$$
$$\|\overline{v}_1\|^2 = 3 \qquad \|\overline{v}_2\|^2 = \frac{5}{3}$$

5.- *Comprobar el resultado*: $\overline{w} \in S \quad y \quad \{\overline{w} - \overline{v}\} \perp B_S$

✶ *Norma del error cometido*

$$\|\overline{v} - \overline{w}\| = \left\| \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

b.- *Utilizando el producto escalar usual encontrar la mejor aproximación $\overline{w}$ de $\overline{v} = (0, 1/2, 1, 1)$ al subespacio vectorial:*

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (-1, 0, 1, 1), \overline{u}_2 = (1, 1, 1, 1)\}\right)$$

y hallar la norma del error cometido.

Solución

$$\overline{v} \in S \implies \overline{w} = \overline{v} \quad y \quad \|\overline{w} - \overline{v}\| = 0$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UNA SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES INCOMPATIBLE. (MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS)

El ejemplo introductorio del capítulo describe un gigantesco problema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *que no tenía solución. Los sistemas inconsistentes surgen con frecuencia en las aplicaciones, aunque generalmente no con una matriz de coeficientes tan enorme. Cuando se necesita una solución y no existe alguna, lo mejor que se puede hacer es encontrar una* $\mathbf{x}$ *que haga* $A \cdot \mathbf{x}$ *tan cercana a* $\mathbf{b}$ *como sea posible.*

Pensemos en $A \cdot \mathbf{x}$ *como una* ***aproximación*** *de* $\mathbf{b}$*. Cuanto más corta sea la distancia entre* $\mathbf{b}$ *y* $A \cdot \mathbf{x}$*, dada por* $\| \mathbf{b} - A \cdot \mathbf{x} \|$ *mejor será la aproximación. El* ***problema general de mínimos cuadrados*** *es encontrar un* $\mathbf{x}$ *que haga* $\| \mathbf{b} - A \cdot \mathbf{x} \|$ *tan pequeña como sea posible. El término de mínimos cuadrados surge del hecho de que* $\| \mathbf{b} - A \cdot \mathbf{x} \|$ *es la raíz cuadrada de una suma de cuadrados, pues estamos utilizando el producto escalar usual en* $\mathbb{R}^n$.

¿Cómo resolver de forma aproximada un sistema de ecuaciones lineales incompatible?

1.- Expresar vectorialmente el sistema:

$$\mathbf{x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + \cdots + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{b} \quad (1) \quad \text{incompatible} \quad \Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{b} \notin S = \mathcal{L}(\{\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, \ldots, \overline{a}'_n\})$$

2.- Hallar $\overline{b}'$ *mejor aproximación de* $\overline{b}$ *en* $\mathbf{S}$.

Utilizar el esquema del apartado anterior

HAY QUE TRABAJAR CON EL PRODUCTO ESCALAR USUAL

3.- Resolver el sistema:

$$\mathbf{x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + \cdots + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{b}' \; (*)}$$

La solución del sistema (∗) es la solución aproximada del sistema incompatible (1).

-EJERCICIO.- ***Resolver de forma aproximada el sistema de ecuaciones lineales dado por:***

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución

1.- Comprobamos que el sistema es incompatible:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F_3-F_1}{F_4-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F_3-2F_2}{F_4-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 3 = n < r(AM) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \text{S.I.}$$

2.- Escribimos el sistema en forma vectorial:

$$x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + x_3 \cdot \overline{a}'_3 = \overline{b}'$$

$$\overline{a}'_1 = (1,0,1,1) \;,\; \overline{a}'_2 = (0,1,2,1) \;,\; \overline{a}'_3 = (1,2,2,3) \;,\; \overline{b}' = (1,1,1,1)$$

- $\overline{b}' \notin S = \mathcal{L}(\{\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, \overline{a}'_3\})$
- $B_S = \{\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, \overline{a}'_3\}$ base de S

3.- Hallamos la mejor aproximación $\overline{w}'$ de $\overline{b}'$ en S:

3.1.- Encontrar una base B_S de S $\quad B_S = \{\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, \overline{a}'_3\}$

3.2.- Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base B_S de S para conseguir una base ortogonal B_O de S:

- $\overline{v}_1 = \overline{a}'_1 = \cdots = (1,0,1,1) = \overline{v}_1$
- $\overline{v}_2 = \overline{a}'_2 - \dfrac{\langle \overline{a}'_2, \overline{v}_1\rangle}{\|\overline{v}_1\|^2}\cdot \overline{v}_1 = \cdots = (-1,1,1,0) = \overline{v}_2$
- $\overline{v}_3 = \overline{a}'_3 - \dfrac{\langle \overline{a}'_3, \overline{v}_1\rangle}{\|\overline{v}_1\|^2}\cdot \overline{v}_1 - \dfrac{\langle \overline{a}'_3, \overline{v}_2\rangle}{\|\overline{v}_2\|^2}\cdot \overline{v}_2 = \cdots = (0,1,-1,1) = \overline{v}_3$

$$B_O = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$$

3.3.- Hallar la suma de las proyecciones ortogonales de $\overline{b}'$ sobre los vectores de la base ortogonal B_O de S:

$$\overline{w}' = \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_1\rangle}{\|\overline{v}_1\|^2}\cdot \overline{v}_1 + \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_2\rangle}{\|\overline{v}_2\|^2}\cdot \overline{v}_2 + \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_3\rangle}{\|\overline{v}_3\|^2}\cdot \overline{v}_3 = \cdots = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = \overline{w}'$$

4.- Resolver el sistema:

$$x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + x_3 \cdot \overline{a}'_3 = \overline{w}'$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2/3 \\ x_2 + 2x_3 &= 2/3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4/3 \end{aligned}\right.$$

$$BM = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4/3 \end{array}\right) \underset{F_4 - F_1}{\overset{F_3 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2/3 \\ 0 & 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 \end{array}\right) \underset{F_4 - F_2}{\overset{F_3 - 2F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{x}_1 = 1/3 \quad , \quad \overline{x}_2 = 0 \quad , \quad \overline{x}_3 = 1/3$$

Cálculo alternativo de una solución por mínimos cuadrados.

El siguiente teorema proporciona un criterio útil para cuando existe una solución por mínimos cuadrados de $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

La matriz $A^T \cdot A$ *es invertible si y sólo si las columnas de* A *son linealmente independientes. En este caso, la ecuación* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene solamente una solución por mínimos cuadrados y viene dada por:*

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

Producto escalar

CONCEPTOS
PROPIEDADES
Ejemplos

Expresión matricial

Características

Teoría de aproximación lineal

Objetivo
Planteamiento

Coeficientes de Fourier
Suma de Fourier

Espacio vectorial euclídeo

Propiedades

Norma
Distancia
Ángulo entre dos vectores

Ortogonalidad
Ortonormalidad

Vectores
Subconjuntos
Proyección ortogonal

Método de Gram-Schmidt