Tema 2.- DETERMINANTES

- ***DETERMINANTES***
- ***MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS***
- ***RANGO DE UNA MATRIZ. APLICACIONES***

Un poco de historia

Los determinantes es uno de los temas más útiles del Álgebra Lineal, con muchas aplicaciones en ingeniería, física, matemáticas y otras ciencias. En la geometría ofrecen una forma natural de escritura de fórmulas muy elegantes que calculan áreas y volúmenes, y también ecuaciones de objetos geométricos como rectas, círculos, planos, esferas, etc.

Dirichlet nos dice que los determinantes fueros introducidos por Leibniz, en una carta a L´Hôpital fechada el 28 de abril de 1693. También hay pruebas de que Seki Takakazu, matemático japonés, ya los usaba en 1683. Los principales contribuyentes en esta área han sido Laplace, Cauchy, Jacobi, Bézout, Sylvester y Cayley.

Aunque los determinantes aparecieron en las publicaciones a fines del siglo XV (mucho antes que las matrices), el primer trabajo que los estudió en forma sistemática fue escrito por **Vandermonde** (1735-1796) en 1772.

Vamos a dar una definición **recursiva** *de un determinante. Para ello es conveniente definir previamente los conceptos de* **menor complementario** *y adjunto* **(i , j)**. *De este modo, un determinante* $n \times n$ *se define con determinantes de submatrices* $(n-1) \times (n-1)$.

Será también necesario recordar que el determinante de una matriz cuadrada de orden 2, $A = (a_{ij})$, *es el número*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Aunque podemos definir el determinante de una matriz cuadrada de orden 3 en función de determinantes de matrices cuadradas de orden 2, conviene conocer la denominada **regla de Sarrus**.

DETERMINANTES

Si **A** *es una matriz cuadrada de orden* **n**, *entonces* M_{ij} *es el determinante de una matriz cuadrada de orden* **n-1**.

Sea **A** una matriz cuadrada de orden **n**:

- *Menor complementario de* a_{ij} (M_{ij}) *es el determinante de la submatriz cuadrada de* A *que resulta de suprimir la fila* i *y la columna* j *de* A.
- *Adjunto de* a_{ij} (A_{ij}) : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

  $$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 5$$

Los signos más o menos del adjunto de a_{ij} *dependen de la posición de* a_{ij} *en la matriz sin importar el signo de* a_{ij}. *El factor* $(-1)^{i+j}$ *está determinando por la denominada* ***"regla de los signos"***.

★ $\det(0)_{n\times n} = 0$

★ $\det I_{n\times n} = 1$

★ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

★ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{32}$

★ $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{11}$

★ ***Regla de Sarrus:***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

El desarrollo de un determinante de orden 3 se puede recordar usando el siguiente truco. Escribimos una segunda copia de las primeras dos columnas a la derecha de la matriz y calculamos el determinante multiplicando las entradas de seis diagonales:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Notación vectorial de un determinante

Si $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *consideramos:*

★ *los vectores:*
$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) \end{array}\right\}$$ ***Vectores fila de A***

escribimos: $\det A = \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$

★ *los vectores:*
$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}'_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \\ \bar{a}'_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}'_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \end{array}\right\}$$ ***Vectores columna de A***

Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna.-

- *elegida la fila:* $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es la suma de los n productos de los elementos de una fila por sus correspondientes adjuntos.

- *elegida la columna:* $\bar{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es la suma de los n productos de los elementos de una columna por sus correspondientes adjuntos.

Utilizando la definición* recursiva *anterior, el determinante de una matriz cuadrada de orden n, se define con determinantes de matrices cuadradas de orden n – 1.

El resultado anterior es útil para calcular los determinantes de una matriz que contiene muchos ceros. Por ejemplo, si una fila consiste en su mayor parte en ceros, entonces el desarrollo por los elementos de esa fila tiene muchos términos que son cero y no es necesario calcular los adjuntos de esos términos. El mismo método funciona obviamente con una columna que contiene muchos ceros.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **Calcular el determinante de A**

$$\det A \overset{\text{desarrollo } F_1}{=} 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + (-3) \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot M_{14} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

Para los estándares actuales, una matriz 25×25 es pequeña. Sin embargo, sería imposible calcular un determinante 25×25 empleando el desarrollo por los elementos de una fila o columna. En general, un desarrollo por adjuntos requiere más de $n!$ multiplicaciones y $25!$ es aproximadamente 1.5×10^{25}.

Si un supercomputador pudiera hacer un billón de multiplicaciones por segundo, tendría que trabajar durante más de 500000 años para calcular un determinante 25×25 con este método. Afortunadamente, como pronto descubriremos, hay métodos más rápidos.

Antes de explicar de qué manera se calculan los determinantes de matrices cuadradas de orden n ($n > 3$, e incluso $n = 3$) de un modo eficaz, vamos a estudiar las propiedades más importantes de los determinantes. Estas propiedades nos pueden resultar muy útiles en la práctica.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

1.- $$\det \mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}^T\right)$$

$$\det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_n)$$

Vectores fila ***Vectores columna***

Las propiedades relativas a las filas de una matriz $\mathbf{A}$ serán también válidas para las columnas de $\mathbf{A}$.

Enunciaremos las siguientes propiedades para filas, pues todas las propiedades que se cumplen para filas, se cumplen también para columnas.

2.- $$\det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_n) = -\det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n)$$

Si intercambiamos DOS de las filas de un determinante, éste cambia de signo.

3.- $\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i} = \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{j} \implies \det(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{j}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n}) = \mathbf{0}$

Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales, su determinante es nulo.

4.- $\det(\bar{\mathrm{a}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{a}}_\mathrm{i} + \bar{\mathrm{b}}_\mathrm{i}, \ldots, \bar{\mathrm{a}}_\mathrm{n}) = \det(\bar{\mathrm{a}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{a}}_\mathrm{i}, \ldots, \bar{\mathrm{a}}_\mathrm{n}) + \det(\bar{\mathrm{a}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{b}}_\mathrm{i}, \ldots, \bar{\mathrm{a}}_\mathrm{n})$

Esta propiedad tiene fundamentalmente un interés teórico.

5.- $\det(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n}) = \lambda \cdot \det(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n})$

Al multiplicar UNA fila de una matriz cuadrada por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.

$\xcancel{¿\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda \cdot \det \mathbf{A}?}$ ***NO***

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda^\mathbf{n} \cdot \det \mathbf{A}$$

6.- $\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i} = \sum_{\substack{\mathbf{k=1} \\ \mathbf{k \neq i}}}^{\mathbf{n}} \lambda_\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{k} \implies \det(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n}) = \mathbf{0}$

Si una fila de una matriz cuadrada es combinación lineal de las otras filas, su determinante es nulo.

Si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros, su determinante es nulo.

7.- $\det(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n}) = \det\left(\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{i} + \sum_{\substack{\mathbf{k=1} \\ \mathbf{k \neq i}}}^{\mathbf{n}} \lambda_\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{k}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_\mathbf{n}\right)$

Si a una fila de una matriz cuadrada le añadimos una combinación lineal del resto de las filas, su determinante no varía.

Esta propiedad es de gran utilidad para "hacer ceros"

8.- $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$

Aunque el producto de matrices no es necesariamente conmutativo:

$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} =$

$= \det\mathbf{B}\cdot\det\mathbf{A} = \det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$

El determinante de una potencia de una matriz cuadrada es:

$\det(\mathbf{A}^{\mathbf{n}}) = \det\left(\overbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}^{\mathbf{n\ veces}}\right) =$

$= \overbrace{(\det A)\cdot(\det A)\cdot\cdots\cdot(\det A)}^{\mathbf{n\ veces}} =$

$= (\det\ \mathbf{A})^{\mathbf{n}}$

9.- ***El determinante de una matriz triangular superior (inferior) es el producto de los elementos de su diagonal principal.***

Las propiedades que se acaban de enunciar hacen mucho más sencilla la evaluación de determinantes de orden n, ***con*** n ***grande.***

Normalmente, utilizaremos la propiedad 7.- de manera repetida hasta que:

✶ ***el nuevo determinante tenga una fila*** *(columna)* ***de ceros*** *o una fila (columna) que sea múltiplo de otra, (en cuyo caso el determinante es cero),*

✶ ***la nueva matriz es triangular,***

✶ ***la nueva matriz tenga una fila*** *(columna)* ***con todos los elementos nulos salvo uno. Entonces desarrollaremos por esa fila*** *(columna).*

RANGO DE UNA MATRIZ

En este apartado definimos el concepto de rango de una matriz y con la ayuda de los conceptos de espacios vectoriales, examinaremos el *interior* de una matriz para descubrir muchas relaciones útiles e interesantes ocultas entre sus filas y columnas.

Por ejemplo, imaginemos que se colocan 2000 números aleatorios en una matriz A 40×50 y después se determina tanto el número máximo de filas linealmente independientes en A como el número máximo de filas linealmente independientes en A^T (columnas de A). Resulta notable que ambos números coinciden. Como pronto veremos, este valor común es el ***rango*** de la matriz.

Matrices no necesariamente cuadradas

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{m\times n}}(\mathbb{R})$

✶ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

✶ ***Submatriz de* A:** *matriz cuyas filas y columnas son parte de las filas y columnas de* A.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

✶ ***Menor de* A:** *cualquiera de los determinantes de las submatrices cuadradas de* A. ($\mathbf{M_p}$ **:** *menor de orden* p *de la matriz* A)

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Rango de una matriz A.- $\mathrm{r}(\mathbf{A})$

número máximo de filas linealmente independientes de la matriz A.

número máximo de columnas linealmente independientes de la matriz A.

el mayor de los órdenes de los menores no nulos de la matriz A.

Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{A} \neq (\mathbf{0})_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, entonces:

$$\mathbf{1} \leq \mathbf{r}\,(\mathbf{A}) \leq \min\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$$

A continuación mencionamos ciertas observaciones que son muy útiles para calcular el rango de una matriz cualquiera. No obstante, en el siguiente apartado introduciremos un nuevo método (operaciones elementales de fila) que podemos usar también para el cálculo del rango y simplificará en muchos casos la resolución de este tipo de cuestiones.

Observaciones útiles para calcular el rango de una matriz A

1.- Si una fila o columna de A es combinación lineal de las demás filas o columnas, se suprime.

2.- Se fija un menor de orden p, *normalmente* $p = 2$, ***con*** M_p ***no nulo. Si al añadir a*** M_p ***una fila fija*** F_i ***con cada una de las restantes columnas de A que no están en*** M_p, ***todos los menores de orden*** $p + 1$ ***obtenidos de este modo son nulos, eso significa que la fila*** F_i ***es combinación lineal de las filas*** *de* **A** ***que forman parte de*** M_p , ***luego*** *según la observación* ***1.-, se suprime*** F_i.

3.- Si A es una matriz cuadrada, suele ser útil empezar calculando su determinante, pues:

- ✶ $\det \mathrm{A} \neq 0 \implies \mathrm{r}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$
- ✶ $\det \mathrm{A} = 0 \implies \mathrm{r}\,(\mathrm{A}) < \mathrm{n}$

MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS

Operaciones elementales de filas.-

Se llaman ***operaciones elementales de filas*** sobre una matriz **A** a cualquiera de las siguientes operaciones:

- ✶ ***Intercambiar dos filas de A*** $\mathbf{F_i \longleftrightarrow F_j}$
- ✶ ***Multiplicar todo los elementos de una fila de A por un número no nulo*** $\lambda \cdot \mathbf{F_i}$
- ✶ ***Sumar a una fila i otra fila j multiplicada por un número*** $\mathbf{F_i} + \lambda \cdot \mathbf{F_j}$

Si denominamos ***entrada principal*** de una fila a la entrada diferente de cero que está más a la izquierda en una fila no nula, diremos que una matriz está en ***forma escalonada*** si tiene las siguientes tres propiedades:

*1.- **Todas las filas diferentes de cero están arriba de cualquier fila nula.***

*2.- **Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de una fila superior.***

*3.- **Todas las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.***

El rango de una matriz escalonada es el número de sus entradas principales.

Matrices equivalentes por filas.-

Dos matrices **A** *y* **B** *del mismo orden son* ***equivalentes por filas*** ($\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$) *cuando la matriz* **B** *se obtiene a partir de* **A** *mediante un número finito de operaciones elementales de filas.*

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \ , \ \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{r}\,(\mathbf{B})$$

***Construir una matriz escalonada* B *equivalente a* A. *El rango de* A *y el rango de* B *es el número de entradas principales de la matriz escalonada* B *equivalente a* A. *Además las filas no nulas de la matriz* B *constituyen una base del subespacio vectorial engendrado por los vectores fila de* A.**

Cálculo del rango de una matriz

1.- *Si ningún elemento de* A *depende de parámetros:* ***operaciones elementales de filas, hasta conseguir una matriz escalonada***.

2.- *Si algún elemento de* A *depende de uno o más parámetros, en general, no es recomendable hacer operaciones elementales de filas.*

2.1.- *Si* A *es cuadrada de orden* n, *calcular su* ***determinante****, pues:*

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{n} \ \text{ si } \ \det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r}\,(\mathbf{A}) \ ? < \mathbf{n} \ \text{ si } \ \det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Pasar a 2.2.-

2.2.- *Si* A *no es cuadrada, utilizar* ***menores****, empezando en general por un* M_2 *no nulo e ir "orlando".*

-EJERCICIO.- Calcular el rango de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 - F_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Matriz escalonada

Como $\mathbf{B}$ es una matriz escalonada equivalente a $\mathbf{A}$, tenemos que las dos matrices tienen el mismo rango, el rango de $\mathbf{B}$ es el número de sus entradas principales.

Esta información será útil en el tema de espacios vectoriales.

-EJERCICIO.- Calcular el rango de la matriz $\mathbf{A}$.

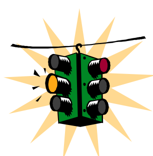
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim$$

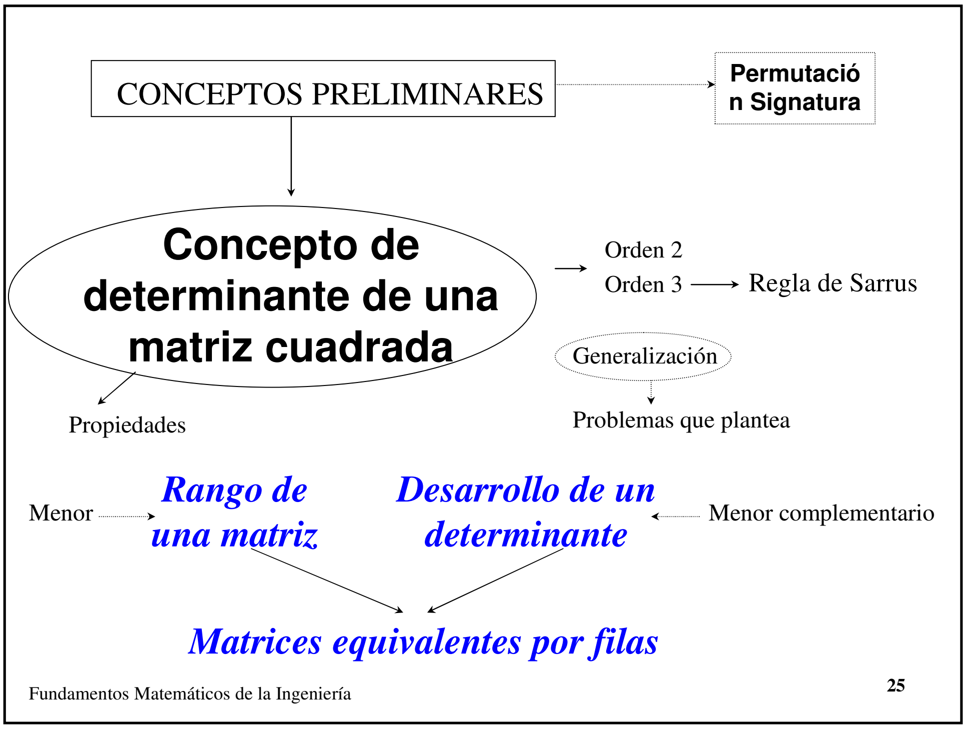
$$\sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Matriz escalonada

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{B}) = 3$$

Aunque las tres primeras filas de $\mathbf{B}$ son linealmente independientes, es erróneo concluir que las tres primeras filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. (De hecho la tercera fila de $\mathbf{A}$ es dos veces la primera fila más siete veces la segunda fila).




CONCEPTOS PRELIMINARES
Permutación Signatura
Concepto de determinante de una matriz cuadrada
Orden 2
Orden 3
Regla de Sarrus
Generalización
Problemas que plantea
Propiedades
Menor
Rango de una matriz
Desarrollo de un determinante
Menor complementario
Matrices equivalentes por filas
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
25