FUNDAMENTOS DE LA INGENIERÍA II

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Alumno		**Calificación**	

Contesta si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones, sin justificar la respuesta. Los cuatro primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del quinto fallo, por cada uno de ellos, se descontará un cuarto de la puntuación de un acierto. Si no hay ninguna respuesta marcada como correcta se entenderá que no se ha respondido la cuestión planteada. La forma de puntuar la prueba será la siguiente:

$$\frac{\text{Respuestas correctas - } 0.5\times(\text{Respuestas incorrectas - } 4)}{2}$$

V	F		
		1.	Toda matriz de Gram es necesariamente regular.
		2.	Dos vectores no nulos son ortogonales si el ángulo que forman es $\pm\frac{\pi}{2}$.
		3.	En un espacio vectorial eucídeo se cumple: $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \langle \bar{x},\bar{z}\rangle \Leftrightarrow \bar{y}=\bar{z}$.
		4.	Para calcular la mejor aproximación de un vector en un espacio vectorial euclídeo calculamos la suma de Fourier de este vector respecto de una base del espacio vectorial.
		5.	Si $\bar{x}\perp\bar{y}$ e $\bar{y}\perp\bar{z}$, entonces $\bar{x}\perp\bar{z}$.
		6.	Se satisface que: $\lVert\bar{x}\rVert=\lVert\bar{y}\rVert \Leftrightarrow \langle \bar{x}-\bar{y},\bar{x}+\bar{y}\rangle = 0$.
		7.	La matriz $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ es una matriz de Gram.
		8.	El ángulo formado por los vectores (1, 0) y (0, 1) en el espacio vectorial eucídeo $\left(\mathbb{R}^2,\langle,\rangle\right)$ con el producto escalar $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = x_1y_1+2x_2y_2$ es $\frac{\pi}{2}$.
		9.	En un espacio vectorial euclídeo dado, cualquier colección de vectores ortogonales forma un sistema libre de vectores.
		10.	La mejor aproximación del vector nulo en cualquier espacio vectorial euclídeo es siempre el propio vector nulo.
		11.	Todo sistema ortonormal de vectores es ortogonal.
		12.	Toda colección de vectores ortogonales no nulos es un sistema libre.
		13.	$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = x_2y_2+x_3y_3, \quad \forall \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^3$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.
		14.	$\lVert\bar{x}\rVert=\lVert\bar{y}\rVert \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$.
		15.	En un espacio vectorial eucíldeo la distancia entre dos vectores cualesquiera nunca es una cantidad negativa.
		16.	$\lVert\bar{x}+\bar{y}\rVert=\lVert\bar{y}-\bar{x}\rVert \Rightarrow \bar{x}\perp\bar{y}$.
		17.	En todo espacio vectorial euclídeo de dimensión finita existen bases ortogonales.

		18.	La solución aproximada en el sistema de mínimos cuadrados del sistema incompatible $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ es $(1,-\frac{1}{2})$.
		19.	Si B es una base ortonormal de un espacio vectorial eucídeo dado, entonces la matriz de Gram asociada al producto escalar en dicha base es la matriz unidad.
		20.	Una matriz de Gram es siempre simétrica.

EJERCICIO EXTRA (2 puntos):

Demuestra el siguiente resultado:

Si (V, <,>) es un espacio vectorial euclídeo, se cumple que

$$\|\overline{x}+\overline{y}\| = \|\overline{y}-\overline{x}\| \Rightarrow \overline{x} \perp \overline{y}, \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$$

Razonar la respuesta.