PRUEBA V/F
ESPACIOS VECTORIALES

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de ser ciertas es necesario dar una demostración. Si una afirmación es falsa es suficiente dar un contraejemplo.

1. Un conjunto de vectores que contenga dos vectores iguales es linealmente dependiente.

2. Un subconjunto de vectores linealmente independiente puede contener dos vectores proporcionales.

3. Todo subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente es a su vez linealmente independiente.

4. Un sistema generador de un espacio vectorial no puede contener el mismo número de vectores que una base del espacio.

5. El rango de una base de un espacio vectorial coincide con la dimensión de dicho espacio.

6. Si $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$, entonces $\overline{w}$ deber ser necesariamente combinación lineal de los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

7. Si el vector $\overline{u}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{v}$ y $\overline{w}$, entonces $\overline{w}$ es combinación lineal de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

8. Si un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$ no contiene a ninguno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $V = \{\overline{0}\}$.

9. Los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:
$$(1,2,1,0); (1,3,3,1); (1,4,6,4); (1,5,10,5); (1,6,15,15)$$
son linealmente independientes.

10. El conjunto $S = \{(x, y, z)/x^2 - y^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

11. Un conjunto de vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}$ es linealmente independiente si para $a = b = c = d = 0$ se tiene:
$$a \cdot \overline{u}_1 + b \cdot \overline{u}_2 + c \cdot \overline{u}_3 + d \cdot \overline{u}_4 = \overline{0}$$

12. Sea $S = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4/a + d = 0 \wedge b - c = a\right\}$. Entonces $\dim S = 2$.

13. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ son vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real V, entonces $\dim V \geq n$.

14. Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial real V, entonces $S_1 \cup S_2$ es también subespacio vectorial de V.

15. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ y $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$ son dos sistemas generadores distintos de un mismo subespacio vectorial real S, entonces $n = m$.

16. Si $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}$ es una base de un cierto espacio vectorial real V, entonces
$$\{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_2 + \overline{u}_3, \overline{u}_3 + \overline{u}_4\}$$
es también base de V.

17. Todo sistema libre de un espacio vectorial real V, es base de V.

18. En el espacio vectorial real $\mathcal{P}_n$ es posible encontrar un sistema generador de $\mathcal{P}_n$ compuesto por n polinomios.

19. Si $\dim S = 1$, entonces todo sistema libre de vectores de S es base de S.

20. Si $S = \{(a+c, a-b, b+c, 0)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$, entonces $\dim S = 3$.

21. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ y $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$ son dos bases distintas de un mismo espacio vectorial real V, entonces $n = m$.

22. Si $G = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ constituye un sistema generador del espacio vectorial real $\mathcal{P}_3$, entonces G es base de $\mathcal{P}_3$.

23. Si $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ constituye una base de un espacio vectorial real V, entonces $\{\overline{u}_1-\overline{u}_3, \overline{u}_2-\overline{u}_1, \overline{u}_2+\overline{u}_3\}$ es también base de V.

24. $S = \{(x, y)/x \geq 0, y \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

25. El conjunto $G = \{p_1(x) = 3x^2 + 3x + 1, p_2(x) = 2x^2 + x + 1\}$ es un sistema generador del subespacio de $\mathcal{P}_2$
$$S = \{(a+b)x^2 + (2a-b)x + b/a, b \in \mathbb{R}\}$$

26. La dimensión del espacio vectorial real $\mathcal{P}_n$ es n.

27. La dimensión del espacio vectorial real $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es $m + n$.

28. El conjunto
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ c-b & a+b \end{pmatrix} /a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensión 3.

29. El conjunto $S = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/A = A^T\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensión 3.

30. No existen sistemas generadores de $\mathbb{R}^4$ formados por 6 vectores.